

ĐỀ CƯƠNG HỌC KÌ I TOÁN 8

A. BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1: Rút gọn biểu thức.

Bài 1. Rút gọn biểu thức:

- a) $3x(4x-3)-(2x-1)(6x+5)$
- b) $3x(x-1)^2-2x(x+3)(x-3)+4x(x-4)$
- c) $(x-1)^3-(x+2)(x^2-2x+4)+3(x+4)(x-4)$
- d) $(x+1)(x^2+x+1)(x-1)(x^2-x+1)$

Bài 2. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức:

- a) $(x-1)^3+4x(x+1)(x-1)+3(x-1)(x^2+x+1)$ tại $x=-2$.
- b) $2(2x+3y)(2x-3y)-(2x-1)^2-(3y-1)^2$ tại $x=1, y=-1$.

Dạng 2: Phân tích đa thức thành nhân tử.

Bài 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $a^2+b^2+2ab+2a+2b+1$
- b) $ax^2-ax+bx^2-bx+a+b$
- c) $3x(x-2y)+6y(2y-x)$
- d) $x^2-2xy+y^2-n^2+2mn-m^2$
- e) $81x^2-6xyz-9y^2-z^2$
- f) $4a^2b^2-(a^2+b^2-1)^2$
- g) x^3-4x^2-8x+8
- h) $16xy+4y^2-9+16x^2$

Bài 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) x^4+64y^8
- b) $x^2-7x+12$
- c) $3x^2-7x+2$
- d) x^3+2x-3
- e) x^3+5x^2+8x+4
- f) $(x^2+9)^2+8x(x^2+9)+12x^2$
- g) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-8$

Dạng 3: Tìm x.

Bài 5. Tìm x biết:

- a) $6(x+2)(x-3)-3(x-2)^2-3(x-1)(x+1)=1$
- b) $3(x+2)^2+(2x-1)^2-7(x+3)(x-3)=36$
- c) $(x-1)(x^2+x+1)+x(x+2)(2-x)=5$
- d) $(x-1)^3-(x+3)(x^2-3x+9)+3(x^2-4)=2$

Bài 6. Tìm x biết:

- a) $x^2+3x-18=0$
- b) $8x^2+30x+7=0$
- c) $x^3+11x^2+30x=0$
- d) $(x^2-4x)-8(x^2-4x)+15=0$
- e) $x-8\sqrt{x}-9=0$
- f) $x-2\sqrt{x-1}=0$

Dạng 4: Phép chia đa thức.

Bài 7. Sắp xếp các đa thức sau rồi làm phép chia:

- a) $(3x+2x^4-3x^3-2):(1-x^2)$

b) $(5x^4 - 1 - 3x^5) : (x - x^2 + 1)$

Bài 8. Cho các đa thức: $A = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 10$ và $B = x^2 - x + 1$.

Tìm Q, R sao cho: $A = B \cdot Q + R$.

Bài 9. Xác định các hằng số m để $A(x) \vdots B(x)$.

a) $A(x) = 8x^2 - 26x + m$ và $B(x) = 2x - 3$.

b) $A(x) = x^3 - 13x + m$ và $B(x) = x^2 + 4x + 3$.

c) $A(x) = x^3 - 7x^2 + mx$ và $B(x) = x - 2$.

Bài 10. a) Tìm a, b để $2x^3 - x^2 + ax + b \vdots x^2 - 1$

b) Tìm a, b để $x^4 + x^3 + ax^2 + 4x + b \vdots x^2 - 3x + 2$.

c) Tìm a, b để $x^{10} + ax^3 + b$ chia cho $x^2 - 1$ dư $2x + 1$.

Bài 11. Tìm giá trị nguyên của x để:

a) $8x^2 - 4x + 1 \vdots 2x + 1$

b) $x^3 + 3x^2 - 2x - 18 \vdots x - 2$

c) $x^4 - x^2 - 7 \vdots x^2 - 1$

d) $x^4 - 3x^2 \vdots x^2 - x - 1$

Dạng 5: Toán cực trị.

Bài 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

$$A = x^2 - 6x + 11$$

$$B = 3x^2 - 5x + 7$$

$$C = (x-1)(x+5)(x^2+4x+5)$$

$$D = (x-1)(x+3) + 11$$

$$E = (x-3)^2 + (x-2)^2$$

$$F = \frac{15}{6x - x^2 - 14}$$

Bài 13. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = 1 - x^2 + 4x$$

$$B = 19 - 9x^2 + 6x$$

$$C = \frac{2000}{x^2 + 2x + 6}$$

$$D = -x^2 - 4x - y^2 + 2y$$

Dạng 6: Phân thức đại số.

Bài 14. Cho biểu thức: $A = \frac{x+2}{2x-4} - \frac{x-2}{2x+4} - \frac{8}{4-x^2}$

a) Tìm các giá trị của x để A có nghĩa.

b) Rút gọn A.

c) Tính giá trị của A khi $|x-3|=1$.

Bài 15. Cho biểu thức: $B = \left(2x+1+\frac{1}{2x-1}\right) : \left(\frac{2x^2-6x}{x-3} - \frac{4x^2}{2x-1}\right)$

a) Rút gọn B.

b) Tính B khi x thỏa mãn $x^2 - 3x = 0$.

Bài 16. Cho biểu thức: $C = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x^2+3x}{x^2-2x} - \frac{2x+1}{3-x}$

a) Rút gọn biểu thức C.

b) Tìm giá trị nguyên của x để C nguyên.

Bài 17. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{2+y}{2-y} - \frac{4y^2}{y^2-4} - \frac{2-y}{2+y} \right) : \frac{y^2-3y}{2y^2-y^3} : \frac{1}{y-3}$

- Rút gọn P.
- Tính giá trị của P tại $y = -\frac{1}{2}$.
- Với giá trị nào của y thì $P \geq 0$.

Bài 18. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x^2}{x^3-4x} + \frac{6}{6-3x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$

- Rút gọn A.
- Tính giá trị của biểu thức khi $|x| = \frac{1}{2}$.
- Với giá trị nào của x thì $A+2$.
- Tìm x để $A < 0$.
- Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Bài 19. Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{2x-x^2}{2x^2+8} - \frac{2x^2}{x^3-2x^2+4x-8} \right) : \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1-x}{x} \right)$

- Rút gọn Q.
- Tính giá trị của Q tại $x = (\sqrt{3}-1)^2$.
- Tìm các giá trị nguyên của x để Q nguyên.

Bài 20. Cho biểu thức: $P = 1 + \frac{x+3}{x^2+5x+6} : \left(\frac{8x^2}{4x^3-8x^2} - \frac{3x}{3x^2-12} - \frac{1}{x+2} \right)$

- Rút gọn P.
- Tính giá trị của x để $P = 0$; $P = 1$.
- Tìm các giá trị của x để $P > 0$.

Bài 21. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \frac{x^2-3x}{2x^2-x^3}$

- Rút gọn biểu thức.
- Tìm giá trị của P biết x thỏa mãn: $|2x+3| = x+5$.
- Tìm các giá trị nguyên của x để $P : 4$.
- Khi $x > 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

B. BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 1. a) Cho $x-y=7$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = x^2(x+1) - y^2(y-1) + xy - 3xy(x-y+1) - 95.$$

b) Cho $x+y=5$. Tính giá trị của biểu thức:

$$B = x^3 + y^3 - 2x^2 - 2y^2 + 3xy(x+y) - 4xy + 3(x+y) + 10.$$

c) Cho $x+y=2$; $x^2+y^2=20$. Tính giá trị của x^3+y^3 .

d) Tìm các số x, y thỏa mãn các đẳng thức sau:

$$x^3 + y^3 = 152; x^2 - xy + y^2 = 19; x - y = 2.$$

Bài 2. Phân tích các đa thức thành nhân tử:

- a) $(a^2 + a)(a^2 + a + 1) - 2$ b) $6(x^2 + x)^2 + x^2 + x - 1$
 c) $x^4 + 2011x^2 + 2010x + 2011$ d) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$
 e) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 120$ f) $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) - 20$
 g) $(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 1) + 15x^2$ h) $a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$
 i) $x^5 + x^4 + 1$ k) $x^4 + x^2 + 1$.

Bài 3. a) Cho $ab + bc + ca = 1$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Chứng minh rằng: $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ là bình phương của một số hữu tỉ.

b) Chứng minh: $B = 7.5^{2n} + 12.6^n$ ($n \in \mathbb{N}$) chia hết cho 19.

c) Chứng minh: $A = x^{1970} + x^{1930} + x^{1980}$ chia hết cho $B = x^{20} + x^{10} + 1$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Bài 4. Cho a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn: $ab + bc + ca = 1$. Tính giá trị biểu thức:

a) $A = \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$ b) $B = \frac{(a^2 + 2bc - 1)(b^2 + 2ac - 1)(c^2 + 2ab - 1)}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}$

Bài 5. Tính giá trị của biểu thức: $P = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)$ biết:

a) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

b) $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$

Bài 6. Cho ba số a, b, c thỏa mãn đồng thời ba điều kiện:

$$a^2 + 2b + 1 = 0; \quad b^2 + 2c + 1 = 0; \quad c^2 + 2a + 1 = 0.$$

Tính giá trị biểu thức: $A = a^{2003} + b^{2009} + c^{2011}$.

Bài 7. Cho ba số a, b, c thỏa mãn đồng thời 3 điều kiện:

$$a + b + c = 1; \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1; \quad a^3 + b^3 + c^3 = 1.$$

Tính giá trị của biểu thức: $P = a^{2009} + b^{2010} + c^{2011}$.

Bài 8. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $abc = 2010$. Tính giá trị của biểu thức:

$$M = \frac{2010a}{ab + 2010a + 2010} + \frac{b}{bc + b + 2010} + \frac{c}{ac + c + 1}.$$

Bài 9. Cho 4 số a, b, c, d thỏa mãn: $a + b + c + d = 0$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(b+d)(ac-bd).$$

Bài 10. Chứng minh rằng:

a) $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n : 24, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

b) $(m+1)(m+3)(m+5)(m+7) + 15 : m + 6, \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

Bài 11. Tìm giá trị nhỏ nhất:

a) $A = x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 2011$.

b) $B = \frac{x^2 - 2x + 2011}{x^2} \quad (x \neq 0)$.

c) $C = \frac{2x+1}{x^2+2}$.

d) $D = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{3}{4xy}$ và $E = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy}$ nếu $\begin{cases} x + y = 1 \\ x > 0; y > 0 \end{cases}$.

e) $M = x^4 + y^4$ và $N = x^8 + y^8$ nếu $x + y = 2$.

Bài 12. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

a) $A = 2011 - 5x^2 - y^2 - 4xy + x$ b) $B = \frac{2011}{4x^2 + 12x + 29}$
c) $C = \frac{18x^2 - 48x + 52}{9x^2 - 24x + 21}$ d) $D = \frac{5x^2 + 4x - 1}{x^2}$

Bài 13. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $A = \frac{3 - 4x}{2x^2 + 2}$ b) $B = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 11}$
c) $C = \frac{x^4 + 1}{(x^2 + 1)^2}$ d) $D = \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}$
e) $Q = 2x^2 + 9y^2 - 6xy - 6x - 12y + 2009$.

Bài 14. Tìm đa thức $f(x)$ biết thỏa mãn các điều kiện sau:

- a) $f(x)$ chia cho $(x - 2)$ dư 5.
b) $f(x)$ chia cho $(x - 3)$ dư 7.
c) $f(x)$ chia $(x - 2)(x - 3)$ được thương là $x^2 - 1$ và còn dư.

Bài 15. Tìm dư của phép chia $f(x)$ cho $g(x)$ trong các phép chia sau:

- a) $f(x) = x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{243}$; $g(x) = x - 1$.
b) $f(x) = 1 + x + x^{19} + x^{199} + x^{2009}$; $g(x) = 1 - x^2$.

PHẦN II: HÌNH HỌC

A. BÀI TẬP CƠ BẢN.

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ vuông ở A ($AB < AC$), đường cao AH . Gọi D là điểm đối xứng với A qua H . Đường thẳng kẻ qua D song song với AB cắt BC và AC lần lượt ở M và N .

- a) Tứ giác $ABDM$ là hình gì?
b) Chứng minh: $BD \perp DC$.
c) Gọi I là trung điểm của MC . Chứng minh: $\widehat{HNI} = 90^\circ$.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ nhọn, các đường trung tuyến AM , BN , CP . Qua N kẻ đường thẳng song song với PC cắt BC ở F . Các đường thẳng kẻ qua F song song với BN và kẻ qua B song song với CP cắt nhau ở D .

- a) Tứ giác $CPNF$ là hình gì?
b) Chứng minh: $BDFN$ là hình bình hành.
c) Chứng minh: $AM = DN$.
d) $\triangle ABC$ thỏa mãn điều kiện gì thì tứ giác $PNCD$ là hình thang cân.

Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D .

- a) Chứng minh: $\triangle ACE$ là tam giác vuông cân.
b) Từ A hạ $AH \perp BE$, gọi M , N theo thứ tự là trung điểm của AH và HE . Chứng minh: $BMNC$ là hình bình hành.
c) Chứng minh: M là trực tâm của $\triangle ANB$.
d) Chứng minh: $\widehat{ANC} = 90^\circ$.

- Bài 4.** Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{A} = 60^\circ$; $AD = 2AB$. Gọi M là trung điểm của BC, N là trung điểm của AD. Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với MN tại E cắt AB ở F.
Chứng minh:
a) Tứ giác MNDC là hình thoi.
b) E là trung điểm của CF.
c) $\triangle NCF$ đều.
d) Ba điểm F, M, D thẳng hàng.
- Bài 5.** Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM = DN$. Đường trung trực của BM lần lượt cắt các đường thẳng MN và BC tại E và F. Chứng minh rằng:
a) E và F đối xứng nhau qua AB.
b) Tứ giác MEBF là hình thoi.
- Bài 6.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Gọi M, N, P lần lượt tại trung điểm AB, BC, CA. Biết $AB = 6\text{cm}$; $BC = 10\text{cm}$.
a) Tứ giác AMNP là hình gì? Vì sao?. Tính S_{AMNP} ?.
b) Tính độ dài đường cao AH của $\triangle ABC$.
c) Tính S_{BMPC} .
- Bài 7.** Cho hình thoi ABCD có cạnh 10cm, $AC = 12\text{cm}$. Kẻ $AH \perp BC$.
a) Tính S_{ABCD} .
b) Tính AH.
c) Gọi I là trung điểm của CD và E là điểm đối xứng với A qua I. Chứng minh rằng: $BD \perp DE$ và S_{BDE} .

B. BÀI TẬP NÂNG CAO

- Bài 1.** Cho $\triangle ABC$ đều, đường cao AD, H là trực tâm của tam giác, M là một điểm bất kì trên cạnh BC, gọi E và F lần lượt là hình chiếu của M trên cạnh AB, AC. Gọi I là trung điểm của AM.
a) Tứ giác DIEF là hình gì?, Vì sao?
b) Chứng minh: MH, ID, EF đồng quy.
c) Xác định vị trí của M trên cạnh BC để EF nhỏ nhất.
- Bài 2.** Cho hình thang ABCD, trên tia đối của tia CB lấy điểm M, trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho $BM = DN$. Vẽ hình bình hành AMFN. Chứng minh:
a) Tứ giác AMFN là hình vuông.
b) $\widehat{ACF} = 90^\circ$.
c) Gọi O là trung điểm của FA. Chứng minh rằng: B, D, O thẳng hàng.
- Bài 3.** Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Từ một điểm D trên đáy BC kẻ một đường thẳng vuông góc với BC, đường thẳng này cắt AB ở E, cắt AC ở F. Vẽ các hình chữ nhật BDEH và CDFK. Gọi I, J theo thứ tự là tâm các hình chữ nhật BDEH, CDFK và M là trung điểm của đoạn thẳng AD.
a) Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng HK là một điểm cố định không phụ thuộc vào vị trí của điểm D trên cạnh BC.

- b) Chứng minh ba điểm I, J, M thẳng hàng và ba đường thẳng AD, HJ, KI đồng quy.
c) Khi D di chuyển trên cạnh BC thì M di chuyển trên đoạn thẳng nào?.
- Bài 4.** Cho điểm M nằm giữa A và B. Vẽ các hình vuông AMCD và BMEF trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB.
- a) Chứng minh rằng: $AE = BC$ và $AE \perp BC$.
b) Gọi H là giao điểm của AE và BC. Chứng minh rằng: D, H, F thẳng hàng.
c) Chứng minh: DF đi qua một điểm cố định khi M di động trên AB.
d) Gọi I, G, K lần lượt là trung điểm của AC, AB, BE. P là giao điểm của đường thẳng vuông góc với AB tại G và DF. Tứ giác IMKP là hình gì?, Vì sao?.
e) Khi M di chuyển trên AB thì các trung điểm của đoạn IK chạy trên đường nào?.