

Bài I: (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x-3\sqrt{x}+4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-2}$ với $x > 0, x \neq 4$.

- 1) Tính giá trị của A khi $x = 9$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Cho $P = \frac{B}{A}$. Tìm x để $|P| + P = 0$.

Bài II: (2,5 điểm)

1) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi bằng 34 m. Nếu tăng chiều dài thêm 2 m và tăng chiều rộng thêm 3 m thì diện tích tăng thêm 50 m². Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

2) Một thuyền đánh cá chuẩn bị 10 thùng dầu để ra khơi, mỗi thùng là một hình trụ có đường kính đáy là 0,6m, chiều cao là 1,5m. Hỏi thuyền đó đã chuẩn bị bao nhiêu lít dầu? (Bỏ qua độ dày của vỏ thùng, lấy $\pi \approx 3,14$)

Bài III: (1,5 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (2m-1)x - m^2 + 2$ (m là tham số).

- 1) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) khi $m = 2$.
- 2) Tìm giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - 3x_2 = 7$.

Bài IV: (3,5 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC cố định không qua O . Trên tia đối của tia BC lấy điểm A khác B . Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là tiếp điểm).

- 1) Chứng minh bốn điểm A, M, O, N cùng thuộc một đường tròn.
- 2) MN cắt OA tại H . Chứng minh $OA \perp MN$ và $AH \cdot AO = AB \cdot AC$.
- 3) Chứng minh khi A thay đổi trên tia đối của tia BC , đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài V: (0,5 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 6$.

Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq 3$.



Bài I. (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x-3\sqrt{x}+4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-2}$ với $x > 0, x \neq 4$.

- 1) Tính giá trị của A khi $x = 9$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Cho $P = \frac{B}{A}$. Tìm x để $|P| + P = 0$.

Bài II. (2,5 điểm)

1) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi bằng 34m. Nếu tăng chiều dài thêm 2m và tăng chiều rộng thêm 3m thì diện tích tăng thêm 50m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

2) Một thuyền đánh cá chuẩn bị 10 thùng dầu để ra khơi, mỗi thùng là một hình trụ có đường kính đáy là 0,6m, chiều cao là 1,5m. Hỏi thuyền đó đã chuẩn bị bao nhiêu lít dầu? (Bỏ qua độ dày của vỏ thùng, lấy $\pi \approx 3,14$)

Bài III. (1,5 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng

$(d): y = (2m-1)x - m^2 + 2$ (m là tham số)

- a) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) khi $m = 2$.
- b) Tìm các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - 3x_2 = 7$

Bài IV. (3,5 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC cố định không qua O . Trên tia đối của tia BC lấy điểm A khác B . Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là tiếp điểm).

- 1) Chứng minh bốn điểm A, M, O, N cùng thuộc một đường tròn.
- 2) MN cắt OA tại H . Chứng minh $OA \perp MN$ và $AH \cdot AO = AB \cdot AC$.
- 3) Chứng minh khi A thay đổi trên tia đối của tia BC , đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài V. (0,5 điểm) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 6$

Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq 3$

---HẾT---

HƯỚNG DẪN

Bài I. (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x-3\sqrt{x}+4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-2}$ với $x > 0, x \neq 4$.

- 1) Tính giá trị của A khi $x = 9$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Cho $P = \frac{B}{A}$. Tìm x để $|P| + P = 0$.

Hướng dẫn

- 1) Tính giá trị của A khi $x = 9$.
Thay $x = 9$ (tmdk) vào A , ta được:

$$A = \frac{2\sqrt{9}+1}{\sqrt{9}} = \frac{2.3+1}{3} = \frac{7}{3}$$

Vậy $A = \frac{7}{3}$ khi $x = 9$.

- 2) Rút gọn biểu thức B .

$$B = \frac{x-3\sqrt{x}+4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

$$B = \frac{x-3\sqrt{x}+4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$$

$$B = \frac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$.

- 3) Cho $P = \frac{B}{A}$. Tìm x để $|P| + P = 0$.

$$\text{Ta có: } P = \frac{B}{A} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} : \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Để } |P| + P = 0 \Leftrightarrow |P| = -P \Leftrightarrow P \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1} \leq 0$$

Vì $2\sqrt{x}+1 > 0 \forall x$ tmdk, do đó:

$$\sqrt{x}-2 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 4$$

Kết hợp điều kiện: $x > 0, x \neq 4$

Vậy $0 < x < 4$ để $|P| + P = 0$.

Bài II. (2,5 điểm)

1) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi bằng 34m. Nếu tăng chiều dài thêm 2m và tăng chiều rộng thêm 3m thì diện tích tăng thêm 50m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

2) Một thuyền đánh cá chuẩn bị 10 thùng dầu để ra khơi, mỗi thùng là một hình trụ có đường kính đáy là 0,6m, chiều cao là 1,5m. Hỏi thuyền đó đã chuẩn bị bao nhiêu lít dầu? (Bỏ qua độ dày của vỏ thùng, lấy $\pi \approx 3,14$)

Hướng dẫn

Nửa chu vi của hình chữ nhật là: $34 : 2 = 17$ (m)

Gọi chiều dài của mảnh vườn hình chữ nhật là: x ($0 < x < 17$; m)

thì chiều rộng của mảnh vườn hình chữ nhật là: $17 - x$ (m)

và diện tích của mảnh vườn hình chữ nhật sẽ là: $x.(17 - x)$ (m^2)

chiều dài của mảnh vườn hình chữ nhật sau khi thêm 2m là: $x + 2$ (m)

thì chiều rộng của mảnh vườn hình chữ nhật sau khi thêm 3m là: $17 - x + 3 = 20 - x$ (m)

và diện tích của mảnh vườn hình chữ nhật sau khi thêm sẽ là: $(x + 2).(20 - x)$ (m^2)

Theo đề bài, sau khi tăng chiều rộng thêm 2m và chiều dài thêm 3m thì diện tích của mảnh vườn hình chữ nhật tăng thêm 50m^2 , nên ta có phương trình:

$$(x + 2).(20 - x) - x.(17 - x) = 50$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 2x + 20x + 40 - 17x + x^2 = 50$$

$$\Leftrightarrow x = 50 - 40$$

$$\Leftrightarrow x = 10 \text{ (TM)}$$

Vậy chiều dài của mảnh vườn hình chữ nhật là: 10 (m) và chiều rộng của mảnh vườn là 7 (m)

2) Một thuyền đánh cá chuẩn bị 10 thùng dầu để ra khơi, mỗi thùng là một hình trụ có đường kính đáy là 0,6m, chiều cao là 1,5m. Hỏi thuyền đó đã chuẩn bị bao nhiêu lít dầu? (Bỏ qua độ dày của vỏ thùng, lấy $\pi \approx 3,14$)

Đường kính đáy của một thùng dầu hình trụ là: $0,6 : 2 = 0,3$ (m)

Diện tích đáy của một thùng dầu hình trụ là:

$$S_1 = \pi r^2 \approx 3,14.0,3^2 \approx 0,2826 \text{ (m}^2\text{)}$$

Thể tích của 10 thùng dầu hình trụ là:

$$V = S_1.h.10 = 0,2826.1,5.10 = 4,239 \text{ (m}^3\text{)} \approx 4239 \text{ (dm}^3\text{)} \approx 4239 \text{ (l)}$$

Vậy thuyền đó đã chuẩn bị 4239 lít dầu.

Bài III. (1,5 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng

$(d): y = (2m - 1)x - m^2 + 2$ (m là tham số)

a) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) khi $m = 2$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - 3x_2 = 7$

Hướng dẫn

a) Khi $m = 2$, phương trình đường thẳng (d) trở thành $(d): y = 3x - 2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và $(P): x^2 = 3x - 2$ (1)

Số giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) chính là số nghiệm của phương trình (1)

Ta có $x^2 = 3x - 2$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=4 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy khi $m=2$, (d) cắt (P) tại 2 điểm $A(1,1)$ và $B(2,4)$

b) Xét pthđđ $x^2 = (2m-1)x - m^2 + 2$

$$\Leftrightarrow x^2 - (2m-1)x + m^2 - 2 = 0 \quad (2)$$

Số giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) chính là số nghiệm của phương trình (2)

$$\text{Đề } (d) \text{ cắt } (P) \text{ tại 2 điểm phân biệt} \Leftrightarrow \Delta = (2m-1)^2 - 4(m^2 - 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 8 > 0$$

$$\Leftrightarrow -4m + 9 > 0$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{9}{4}$$

Áp dụng định lý Vi-ét, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2m-1 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m^2 - 2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-1 \\ x_1 - 3x_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-1 \\ 4x_2 = 2m-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-1 \\ x_2 = \frac{1}{2}m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}m+1 \\ x_2 = \frac{1}{2}m-2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó} \quad m^2 - 2 = x_1 x_2 = \left(\frac{1}{2}m-2\right)\left(\frac{3}{2}m+1\right)$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2 = \frac{3}{4}m^2 - \frac{5}{2}m - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2 + \frac{5}{2}m = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}m(m+10) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-10 \end{cases} \quad (TMDK)$$

Vậy $m \in \{-10; 0\}$ thỏa mãn đề bài

Bài IV (3,5 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC cố định không qua O . Trên tia đối của tia BC lấy điểm A khác B . Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là tiếp điểm).

1) Chứng minh bốn điểm A, M, O, N cùng thuộc một đường tròn.

2) MN cắt OA tại H . Chứng minh $OA \perp MN$ và $AH \cdot AO = AB \cdot AC$.

3) Chứng minh khi A thay đổi trên tia đối của tia BC , đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn

Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow OI \perp BC$ (liên hệ giữa đường kính và dây)

Gọi K là giao điểm của MN và OI .

Xét hai tam giác vuông $\triangle AIO$ và $\triangle KHO$ có $\widehat{O}$ chung $\Rightarrow \triangle AIO \sim \triangle KHO$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{OA}{OK} = \frac{OI}{OH} \Rightarrow OK.OI = OA.OH$$

Xét: $\triangle AMO$ vuông tại M , có đường cao AH

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $OA.OH = OM^2 = R^2$

$$\text{Do đó: } OK.OI = R^2 \Rightarrow OK = \frac{R^2}{OI}$$

Mà: BC, O, I cố định nên OI không đổi $\Rightarrow K$ cố định.

Vậy MN luôn đi qua điểm K cố định.

Bài V (0,5 điểm) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 6$

Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + b^2} \geq 3$

Hướng dẫn

$$\text{Xét } \frac{a^3}{a^2 + b^2} = a - \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2ab} = a - \frac{b}{2}.$$

Tương tự, ta suy ra

$$\frac{b^3}{b^2 + c^2} \geq b - \frac{c}{2} \text{ và } \frac{c^3}{c^2 + a^2} \geq c - \frac{a}{2}.$$

Cộng vế với vế 3 bất đẳng thức trên, suy ra:

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + b^2} \geq \frac{a + b + c}{2} = 3 \text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 2$.

--HẾT--