

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức:

$$A = \left[\frac{6x}{\sqrt{x}-1} + \frac{7(\sqrt{x}+1)}{x} + \frac{4}{x\sqrt{x}-x} \right] : \frac{3x-1}{x-\sqrt{x}}, \text{ với } x > 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{3}.$$

1) Rút gọn A .

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của A .

Câu 2. (1,5 điểm) Một ô tô xuất phát lúc 6 giờ từ Hà Nội đến một bến xe ở Hà Tĩnh. Ban đầu xe đi chuyển với vận tốc 45 km/h. Nhận thấy nếu cứ đi với tốc độ đó thì xe sẽ đến muộn hơn so với quy định 1 giờ nên sau 2 giờ kể từ lúc xuất phát, lái xe tăng tốc và đi với vận tốc 60 km/h trên suốt quãng đường còn lại. Do đó xe đến nơi sớm hơn quy định 30 phút. Tính quãng đường xe phải đi và thời điểm xe đến bến xe ở Hà Tĩnh.

Câu 3. (2,5 điểm)

1) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = ax + b$ đi qua điểm $M(1; -1)$ và cắt đường thẳng $(d'): y = 2x + 7$ tại điểm có tung độ bằng 5. Tính diện tích của tam giác xác định bởi (d) và hai trục tọa độ.

2) Cho phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m^2 - 3 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$(x_1^2 - 2mx_1 + m^2 + 1)(x_2 + 1) = 2(x_1 + x_2)^2.$$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc trong với nhau tại A ($R < R'$). Đường kính AB của đường tròn (O) cắt đường tròn (O') tại điểm thứ hai C . Qua C kẻ tiếp tuyến CF với (O) , F là tiếp điểm.

1) Khi $R = \frac{2}{3}R'$ hãy tính diện tích của tam giác FAB theo R .

2) Gọi G là hình chiếu vuông góc của F trên AB . Trên nửa mặt phẳng không chứa F có bờ là đường thẳng AB kẻ đường thẳng qua C , cắt (O) tại D, E (E nằm giữa C, D). Chứng minh rằng $OGED$ là tứ giác nội tiếp.

3) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B cắt đường tròn (O') tại H thuộc nửa mặt phẳng chứa D có bờ là đường thẳng AB . Kéo dài OF cắt AH tại I . Chứng minh rằng CI vuông góc với đường nối tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB và tam giác DIE .

Câu 5. (1,0 điểm) Có hay không một đa thức bậc hai với hệ số nguyên $P(x) = ax^2 + bx + c$ nhận $\sqrt{5}$ là nghiệm? Em hãy giải thích câu trả lời của mình.

.....Hết.....

Ghi chú: Thí sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

LỜI GIẢI ĐỀ TOÁN ĐIỀU KIỆN VÀO TRƯỜNG THPT CHUYÊN SƯ PHẠM LẦN 2

Nguyễn Văn Hải¹ – Lại Cao Phong²

1. Đề thi

Bài 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức

$$A = \left[\frac{6x}{\sqrt{x}-1} + \frac{7(\sqrt{x}+1)}{x} + \frac{4}{x\sqrt{x}-x} \right] : \frac{3x-1}{x-\sqrt{x}}$$

với $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{3}$.

- 1) Rút gọn biểu thức A .
- 2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A .

Bài 2. (1,5 điểm) Một ô tô xuất phát lúc 6 giờ từ Hà Nội đến một bến xe ở Hà Tĩnh. Ban đầu xe di chuyển với vận tốc 45km/h. Nhận thấy nếu cứ đi với tốc độ đó thì xe sẽ đến muộn hơn so với quy định 1 giờ nên sau 2 giờ kể từ lúc xuất phát, lái xe tăng tốc và đi với vận tốc 60km/h trên suốt quãng đường còn lại. Do đó xe đến nơi sớm hơn quy định 30 phút. Tính quãng đường xe phải đi và thời điểm xe đến bến xe ở Hà Tĩnh.

Bài 3. (2,5 điểm)

- 1) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d) : y = ax + b$ đi qua điểm $M(1; -1)$ và cắt đường thẳng $(d') : y = 2x + 7$ tại điểm có tung độ bằng 5. Tính diện tích tam giác xác định bởi (d) và hai trục tọa độ.
- 2) Cho phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m^2 - 3 = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$(x_1^2 - 2mx_1 + m^2 + 1)(x_2 + 1) = 2(x_1 + x_2)^2.$$

Bài 4. (3,0 điểm) Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc trong tại A ($R < R'$). Đường kính AB của đường tròn (O) cắt (O') tại điểm thứ hai C . Qua C kẻ tiếp tuyến CF với đường tròn (O) , F là tiếp điểm.

- 1) Khi $R = \frac{2}{3}R'$ hãy tính diện tích tam giác FAB theo R .
- 2) Gọi G là hình chiếu của F trên AB . Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB không chứa F kẻ đường thẳng qua C , cắt (O) tại D, E (E nằm giữa C, D). Chứng minh $OGED$ là tứ giác nội tiếp.
- 3) Tiếp tuyến của (O) tại B cắt (O') tại H thuộc nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB chứa D . Kéo dài OF cắt AH tại I . Chứng minh CI vuông góc với đường nối tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB và DIE .

Bài 5. (1,0 điểm) Có hay không một đa thức bậc hai với hệ số nguyên $P(x) = ax^2 + bx + c$ nhận $\sqrt[3]{5}$ là nghiệm? Hãy giải thích câu trả lời của mình.

¹Lớp 9, THCS Nguyễn Đăng Đạo, Bắc Ninh, Bắc Ninh

²Lớp 9, THCS Từ Sơn, Từ Sơn, Bắc Ninh

2. Lời giải và bình luận các bài toán

Bài 1 (2,0 điểm)

Cho biểu thức

$$A = \left[\frac{6x}{\sqrt{x}-1} + \frac{7(\sqrt{x}+1)}{x} + \frac{4}{x\sqrt{x}-x} \right] : \frac{3x-1}{x-\sqrt{x}}$$

với $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{3}$.

- 1) Rút gọn biểu thức A .
- 2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A .

Lời giải. 1) Với $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{3}$, ta có

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{6x}{\sqrt{x}-1} + \frac{7(\sqrt{x}+1)}{x} + \frac{4}{x\sqrt{x}-x} \right] : \frac{3x-1}{x-\sqrt{x}} \\ &= \left[\frac{6x^2}{x\sqrt{x}-x} + \frac{7(x-1)}{x\sqrt{x}-x} + \frac{4}{x\sqrt{x}-x} \right] \cdot \frac{x-\sqrt{x}}{3x-1} \\ &= \frac{6x^2+7x-7+4}{x\sqrt{x}-x} \cdot \frac{x-\sqrt{x}}{3x-1} = \frac{6x^2+7x-3}{x\sqrt{x}-x} \cdot \frac{x-\sqrt{x}}{3x-1} \\ &= \frac{(3x-1)(2x+3)(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}}{x(\sqrt{x}-1)(3x-1)} = \frac{2x+3}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{2x+3}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$, $x \neq 1$ và $x \neq \frac{1}{3}$. □

2) Ta có $A = \frac{2x+3}{\sqrt{x}} = \frac{2x}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số thực dương $\left(2\sqrt{x}; \frac{3}{\sqrt{x}}\right)$ ta có $2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{2\sqrt{x} \cdot \frac{3}{\sqrt{x}}} = 2\sqrt{2 \cdot 3} = 2\sqrt{6}$ hay $A \geq 2\sqrt{6}$. Vậy $\min A = 2\sqrt{6}$ và đẳng thức xảy ra khi $2\sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$, thỏa mãn. □

Bài 2 (1,5 điểm)

Một ô tô xuất phát lúc 6 giờ từ Hà Nội đến một bến xe ở Hà Tĩnh. Ban đầu xe di chuyển với vận tốc 45km/h. Nhận thấy nếu cứ đi với tốc độ đó thì xe sẽ đến muộn hơn so với quy định 1 giờ nên sau 2 giờ kể từ lúc xuất phát, lái xe tăng tốc và đi với vận tốc 60km/h trên suốt quãng đường còn lại. Do đó xe đến nơi sớm hơn quy định 30 phút. Tính quãng đường xe phải đi và thời điểm xe đến bến xe ở Hà Tĩnh.

Lời giải. Gọi quãng đường xe phải đi là x (km) ($x > 0$), khi đó quãng đường mà xe đã đi được trong 2 giờ đầu tiên là $45 \cdot 2 = 90$ (km), suy ra quãng đường còn lại là $x - 90$ (km), vì lúc này xe đi 60km/h nên thời gian xe đã đi là $\frac{x-90}{60}$ (giờ), vì xe đến sớm hơn quy định 30 phút hay sớm hơn $\frac{1}{2}$ giờ nên thời gian quy định là $\frac{x-90}{60} + 2 + \frac{1}{2} = \frac{x+60}{60}$ (giờ). Mặt khác, nếu di chuyển với vận tốc 45km/h thì thời gian cần để xe đến Hà Tĩnh là $\frac{x}{45}$. Hơn nữa, khi đó xe

đến muộn 1 giờ nên ta có phương trình $\frac{x}{45} - 1 = \frac{x+60}{60}$. Giải ra ta được quãng đường xe phải đi dài 360km. Khi đó tìm được thời gian xe đã đi là $2 + \frac{360-90}{60} = 6,5$ giờ, từ đó, dễ thấy xe đến Hà Tĩnh lúc $6 + 6,5 = 12,5$ giờ hay 12 rưỡi trưa. $\square$

Bài 3 (2,5 điểm)

- 1) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d) : y = ax + b$ đi qua điểm $M(1; -1)$ và cắt đường thẳng $(d') : y = 2x + 7$ tại điểm có tung độ bằng 5. Tính diện tích tam giác xác định bởi (d) và hai trục tọa độ.
- 2) Cho phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m^2 - 3 = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$(x_1^2 - 2mx_1 + m^2 + 1)(x_2 + 1) = 2(x_1 + x_2)^2. \quad (*)$$

Lời giải. 1) Xét phương trình hoành độ giao điểm (d) và (d') ta có $ax + b = 2x + 7$ (1), mà (d) cắt (d') tại điểm có tung độ bằng 5 nên thay $y = 5$ vào $y = 2x + 7$ tính được $x = -1$. Thay $x = -1$ vào (1) ta được $-a + b = 5$ (2). Mặt khác vì $M(1, -1) \in (d)$ nên thay $(x; y) = (1; -1)$ vào $y = ax + b$ ta được $a + b = -1$ (3). Kết hợp (2) và (3) ta được $\begin{cases} -a + b = 5 \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow (a; b) = (-3; 2)$. Do đó phương trình đường thẳng (d) là $y = -3x + 2$. Dễ thấy (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ $y_0 = 2$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{2}{3}$. Do đó diện tích tam giác xác định bởi (d) và hai trục tọa độ là $S = \frac{1}{2} |x_0 \cdot y_0| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ đvdt. $\square$

2) Phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m^2 - 3 = 0$ có các hệ số

$$a = 1, \quad b = -2(m+2), \quad c = m^2 - 3.$$

Như vậy $\Delta = b^2 - 4ac = 4m^2 + 16m + 16 - 4m^2 + 12 = 16m + 28$. Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{7}{4}$. Khi đó theo định lý Viète ta có

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2(m+2), \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m^2 - 3.$$

Mặt khác, vì x_1 là một nghiệm của phương trình đã cho nên thay x_1 vào phương trình, ta được $x_1^2 - 2(m+2)x_1 + m^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1^2 - 2mx_1 + m^2 + 1 = 4x_1 + 4 = 4(x_1 + 1)$. Thay vào (*) ta được $4(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 2(x_1 + x_2)^2 = 8(m+2)^2 \Leftrightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 2(m+2)^2 = 2m^2 + 8m + 8$ hay $x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = 2m^2 + 8m + 8$. Thay $x_1 + x_2$ và $x_1 x_2$ đã tính ở trên vào phương trình, ta được $m^2 - 3 + 2m + 2 + 4 = 2m^2 + 8m + 8 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 6 = 0 \Leftrightarrow m \in \{-3 + \sqrt{3}; -3 - \sqrt{3}\}$, mặt khác vì $-3 - \sqrt{3} < -\frac{7}{4}$ nên chỉ tồn tại duy nhất một giá trị $m = -3 + \sqrt{3}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Vậy $m = -3 + \sqrt{3}$. $\square$

Bài 4 (3,0 điểm)

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc trong tại A ($R < R'$). Đường kính AB của đường tròn (O) cắt (O') tại điểm thứ hai C . Qua C kẻ tiếp tuyến CF với đường tròn (O) , F là tiếp điểm.

- 1) Khi $R = \frac{2}{3}R'$ hãy tính diện tích tam giác FAB theo R .
- 2) Gọi G là hình chiếu của F trên AB . Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB không chứa F kẻ đường thẳng qua C , cắt (O) tại D, E (E nằm giữa C, D). Chứng minh $OGED$ là tứ giác nội tiếp.
- 3) Tiếp tuyến của (O) tại B cắt (O') tại H thuộc nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB chứa D . Kéo dài OF cắt AH tại I . Chứng minh CI vuông góc với đường nối tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB và DIE .

Lời giải. 1) $R = \frac{2}{3}R' \Rightarrow 2R = \frac{2}{3} \cdot 2R'$

hay $AB = \frac{2}{3}AC$, mà $AC = AB + BC$

$\Rightarrow AB = \frac{2}{3}(AB + BC) = \frac{2}{3}AB + \frac{2}{3}BC$,

suy ra $AB - \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}BC$, suy ra

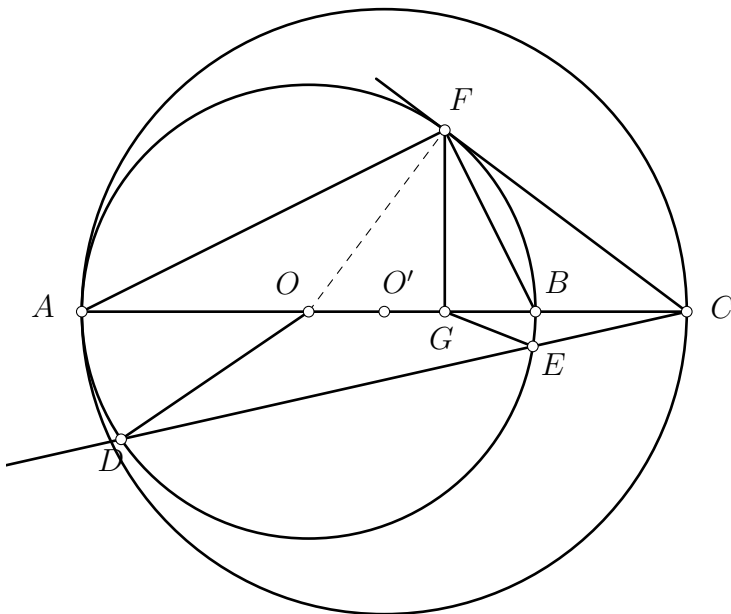
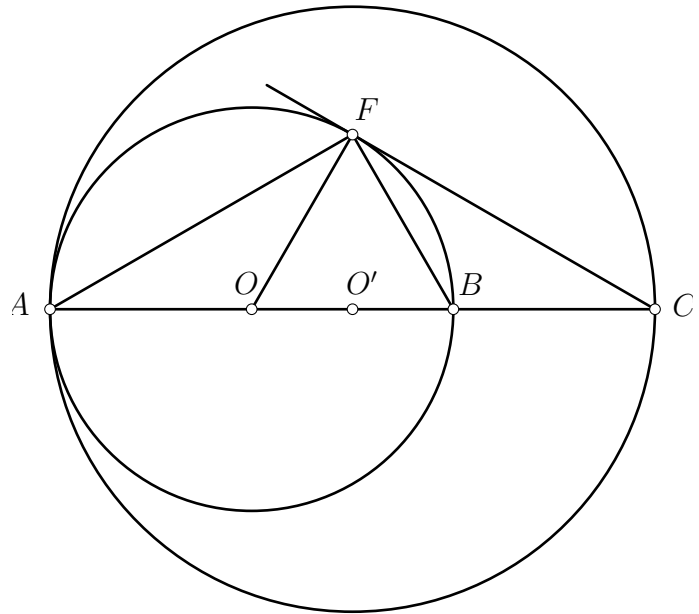
$\frac{1}{3}AB = \frac{2}{3}BC$ hay $AB = 2BC$, suy

ra $OB = BC \Rightarrow OC = 2R$. Lại có

$\cos \widehat{FOC} = \frac{OF}{OC} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$, suy ra

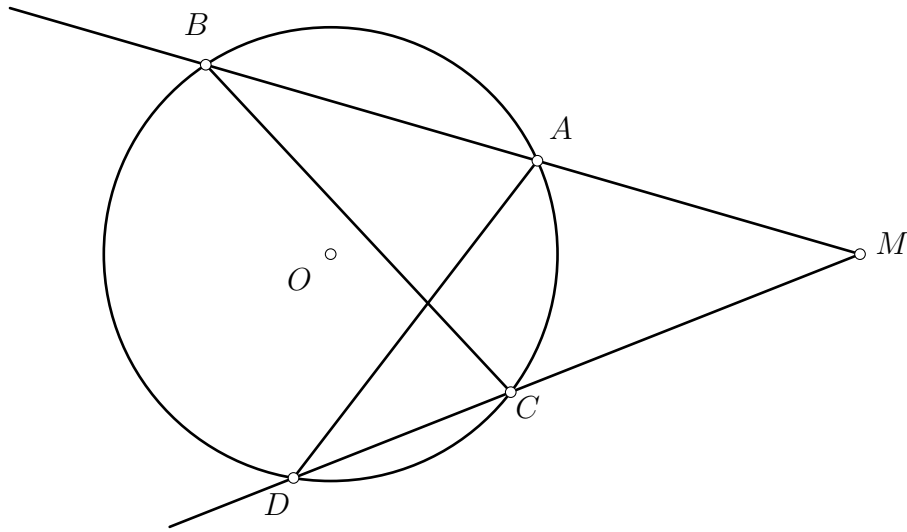
$\widehat{FOC} = 60^\circ \Rightarrow FB = R$ và $FA = R\sqrt{3}$.

Từ đó, $S_{FAB} = \frac{1}{2} \cdot FA \cdot FB = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$. $\square$



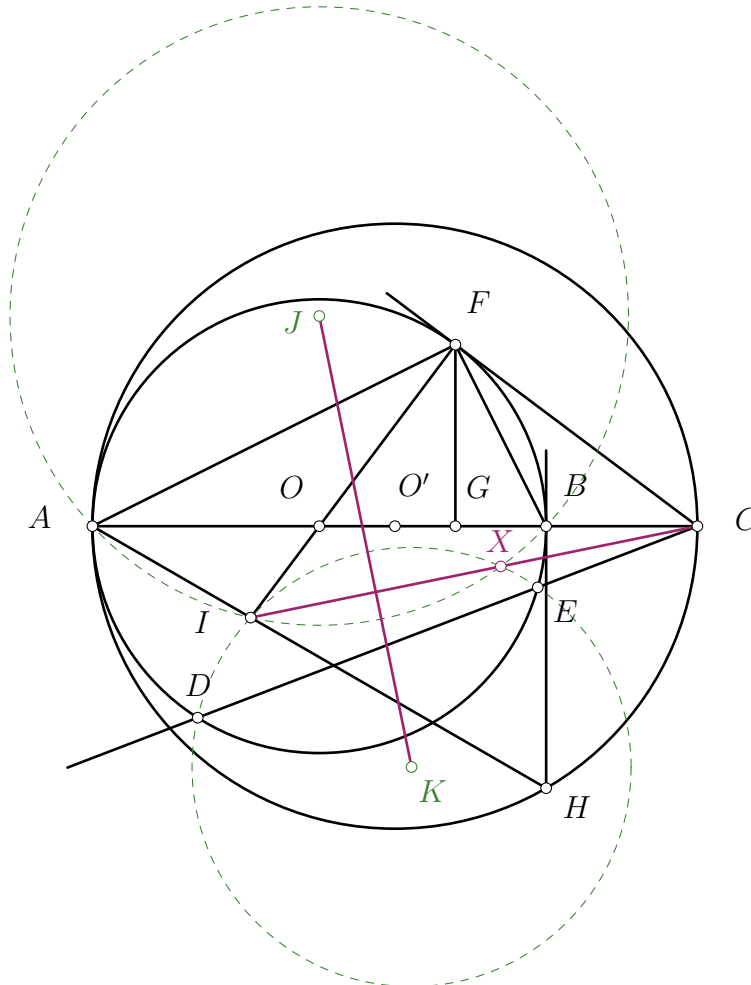
2) Theo tính chất phương tích, dễ chứng minh được $CF^2 = CE \cdot CD$. Mặt khác, vì $\triangle FOC$ vuông tại F và có $FG \perp OC$ tại G nên theo hệ thức lượng, ta có $CF^2 = CG \cdot CO$. Từ các kết quả trên, ta bắc cầu được $CE \cdot CE = CF \cdot CO$, suy ra $\frac{CE}{CG} = \frac{CO}{CD}$. $\triangle CEG$ và $\triangle COD$ có $\widehat{C}$ chung, hơn nữa $\frac{CE}{CG} = \frac{CO}{CD}$ nên $\triangle CEG \sim \triangle COD$, từ đó suy ra $\widehat{CEG} = \widehat{COD}$, suy ra tứ giác $OGED$ nội tiếp. $\square$

3) Trước hết ta chứng minh *tính chất phương tích*.



Tính chất phương tích. Từ điểm M nằm ngoài (O) kẻ hai cát tuyến MAB và MCD với (O) . Khi đó $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Chứng minh. Từ $\triangle MAD \sim \triangle MCB \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD. \quad \square$



Quay trở lại bài toán. Gọi J là tâm (ABI) , K là tâm (DIE) và X là giao điểm thứ hai của CI và (ABI) . Khi đó, theo tính chất phương tích trong (ABI) , ta có $CX \cdot CI = CB \cdot CA$, mà áp dụng phương tích vào (O) ta có $CB \cdot CA = CE \cdot CD$ nên $CX \cdot CI = CE \cdot CD$, suy ra tứ giác $XIDE$ nội tiếp, suy ra $X \in (DIE)$.

Khi đó XI là dây chung của (AIB) và (DIE) . Lại có $KI = KX$ và $JI = JX$, nên JK là trung trực của XI , suy ra $JK \perp XI$ hay $JK \perp CI$, đây chính là điều phải chứng minh. $\square$

Bài 5 (1,0 điểm)

Có hay không một đa thức bậc hai với hệ số nguyên $P(x) = ax^2 + bx + c$ nhận $\sqrt[3]{5}$ là nghiệm? Hãy giải thích câu trả lời của mình.

Lời giải. Giả sử đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) tồn tại. Khi đó vì $\sqrt[3]{5}$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$ nên

$$\begin{aligned} & a\sqrt[3]{25} + b\sqrt[3]{5} + c = 0 \\ \Leftrightarrow & (a\sqrt[3]{25} + b\sqrt[3]{5} + c)(a\sqrt[3]{5} - b) = 0 \\ \Leftrightarrow & 5a^2 + ab\sqrt[3]{25} + ac\sqrt[3]{5} - ab\sqrt[3]{5} - b^2 \cdot \sqrt[3]{5} - bc = 0 \\ \Leftrightarrow & 5a^2 - bc - (b^2 - ac)\sqrt[3]{5} = 0. \quad (*) \end{aligned}$$

Do $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt[3]{5} \in \mathbb{I}$ nên $(*)$ xảy ra khi $\begin{cases} 5a^2 - bc = 0 & (1) \\ b^2 - ac = 0. & (2) \end{cases}$

Nhân (1) với a ta được $5a^3 - abc = 0$, nhân (2) với b ta được $b^3 - abc = 0$, trừ vế cho vế của các phương trình vừa thu được, ta có $5a^3 - b^3 = 0 \Leftrightarrow b = a\sqrt[3]{5}$. (3)

Do $a, b \in \mathbb{Z}$ nên (3) xảy ra khi $a = b = 0$, mâu thuẫn vì $a \neq 0$. Vậy không tồn tại đa thức $P(x)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. $\square$