

Câu 1 (1,5 điểm). Cho biểu thức

$$A = \frac{-1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \left(\frac{x}{\sqrt{y} + 1} + \frac{y}{\sqrt{x} - 1} \right) + \frac{xy}{(\sqrt{y} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \text{ với } x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \neq 0, x \neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm tất cả cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $A = 2$.

Câu 2 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -10x + m^2 - 10m$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_A, x_B thỏa mãn điều kiện $x_A^2 - 11x_A - 1 = x_B$.

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x+1} + 3\sqrt{4x^2-2x+1} = 3 + \sqrt{8x^3+1}$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + y^2 = y - 5 \\ x^2 - 2y^2 - 5xy = 6x - 9y + 31 \end{cases}$$

Câu 4 (1,5 điểm).

a) Tìm các số nguyên dương n sao cho $B = n^4 + n^3 + 3n^2$ là số chính phương.

b) Cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các hệ số nguyên và $a \neq 0$.

Chứng minh rằng nếu phương trình $P(x) = 0$ có một nghiệm là $3 - \sqrt{5}$ thì phương trình $P(x) = 0$ cũng có nghiệm là $3 + \sqrt{5}$.

Câu 5 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Đường trung trực của cạnh BC cắt đường tròn (O) tại hai điểm M, N (M và A nằm cùng phía đối với BC). Đường thẳng qua A vuông góc với BC cắt đường tròn (O) tại điểm D khác A . Đường thẳng BM cắt AD tại H . Đường thẳng qua H song song với BC cắt BD tại E . Gọi P là giao điểm của EM và đường tròn (O) (P khác M), Q là giao điểm của AD và PN .

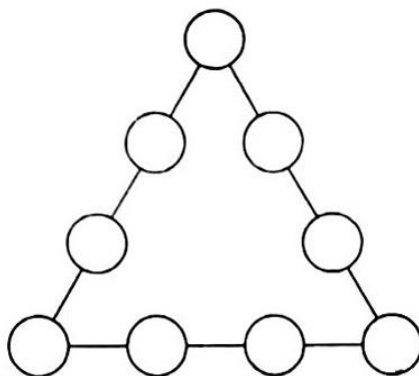
a) Chứng minh rằng các điểm E, B, Q, H, P cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng BM là tia phân giác của góc $\widehat{ABQ}$.

c) Gọi K là giao điểm của AN và BM . Chứng minh rằng KP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HBQ .

Câu 6 (1,0 điểm).

a) Điền các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vào chín ô tròn trong hình bên dưới, mỗi số được viết đúng một lần sao cho tổng bốn số trên mỗi cạnh của tam giác bằng nhau và bằng S . Tìm giá trị nhỏ nhất của S .



b) Người ta thiết kế một thùng chứa nước hình trụ có nắp và thể tích là 2 m^3 . Gọi chiều cao của thùng là $h(m)$ và bán kính đường tròn đáy của thùng là $r(m)$. Tính chi phí vật liệu nhỏ nhất để sản xuất một thùng. Biết rằng giá vật liệu làm mặt đáy và nắp thùng bằng nhau và bằng 1,5 triệu đồng/ m^2 ; giá vật liệu để làm mặt xung quanh thùng là 1 triệu đồng/ m^2 (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

----- HẾT -----