

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2,0 điểm). Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ có phương trình $(d_1): y = x + 3; (d_2): y = -2x + m^2 + m - 18$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ cắt nhau tại một điểm thuộc trục hoành Ox .

Câu 2. (2,0 điểm). Cho ba số thực $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}.$$

Câu 3. (2,0 điểm). Cho đa thức $p(x) = 2024x^{2025} - 2025x^{2024} + 1$. Biết $p(x) = (x-1)^2 \cdot q(x)$ với $q(x)$ là đa thức. Tính giá trị $q(1)$.

Câu 4. (2,0 điểm). Giải phương trình: $x^3 - 9x^2 + 6x + 2\sqrt{(3x-2)^3} = 0$.

Câu 5. (2,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (y^2 - 3x + 5)\sqrt{x+y} = 2\sqrt{x-y} \\ (x^2 + y^2)(x+y) + 2xy = x+y \end{cases}$$

Câu 6. (4,0 điểm). Cho hình thang $ABCD$ vuông ở đỉnh A và đỉnh B thỏa mãn $AD = 2AB = 2BC$. Gọi H chân đường vuông góc kẻ từ A đến BD .

a) Chứng minh $\triangle BHC \sim \triangle BCD$ và tính độ dài CH khi độ dài $AB = 4\text{cm}$.

b) Gọi M là trung điểm của HD . Đường thẳng AM và BC cắt nhau tại điểm E . Chứng minh $EC \cdot EB = EM \cdot EA$.

Câu 7. (2,0 điểm). Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB, AD lần lượt lấy các điểm M, N thỏa mãn $AM = DN$. Kẻ CH vuông góc MN (H thuộc MN), đường thẳng qua M vuông góc với AB cắt CH tại P . Chứng minh ba điểm D, B, P thẳng hàng.

Câu 8 (2,0 điểm). Khi kí hợp đồng làm việc thời hạn 5 năm với người lao động được tuyển dụng mới, một công ty đưa ra ba phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu đồng, kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương tăng thêm 22 triệu so với năm trước.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 30 triệu đồng, kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tăng 1,5 triệu đồng so với quý trước (mỗi quý được tính bằng 3 tháng).

Phương án 3: Tháng thứ nhất, tiền lương là 6 triệu đồng, kể từ tháng thứ 2 trở đi, mỗi tháng tăng 300 nghìn đồng so với tháng trước.

Nếu là người lao động được tuyển dụng, em sẽ chọn phương án nào để khi kết thúc hợp đồng, tổng số tiền lương thu được là nhiều nhất?

Câu 9. (2,0 điểm). Cho 3 số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $L = a^3 + b^3 + c^3$.

----- HẾT -----

- Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!

-Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Câu 1. (2,0 điểm) Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ có phương trình $(d_1): y = x + 3; (d_2): y = -2x + m^2 + m - 18$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ cắt nhau tại một điểm thuộc trục hoành Ox .

Nội dung	Điểm
Tọa độ giao điểm A của $(d_1), (d_2)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -2x + m^2 + m - 18 \end{cases}$	0,5
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m^2 + m - 21}{3} \\ y = \frac{m^2 + m - 12}{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{m^2 + m - 21}{3}; \frac{m^2 + m - 12}{3}\right)$	0,5
Để điểm A thuộc Ox thì tung độ điểm A bằng 0 $\Rightarrow \frac{m^2 + m - 12}{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -4 \end{cases}$	0,5
Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn là $m = 3, m = -4$	0,5

Câu 2 (2,0 điểm). Cho ba số thực $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}.$$

Nội dung	Điểm
Đặt $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c}$ Ta có $xyz = 1$ và $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = x + y + z \Rightarrow x + y + z = xy + yz + zx$	0,5
$P = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = \frac{(1+x)(1+y) + (1+y)(1+z) + (1+z)(1+x)}{(1+x)(1+y)(1+z)}$	0,5
$= \frac{3 + 2(x+y+z) + (xy + yz + zx)}{1 + (x+y+z) + (xy + yz + zx) + xyz} = \frac{3 + 2(x+y+z) + (xy + yz + zx)}{2 + (x+y+z) + (xy + yz + zx)}$	0,5
$= \frac{3 + 2(x+y+z) + (x+y+z)}{2 + (x+y+z) + (x+y+z)} = \frac{3}{2}$	0,5

Câu 3. (2,0 điểm). Cho đa thức $p(x) = 2024x^{2025} - 2025x^{2024} + 1$. Biết $p(x) = (x-1)^2 \cdot q(x)$ với $q(x)$ là đa thức. Tính giá trị $q(1)$.

Nội dung	Điểm
Với số tự nhiên $n \geq 2$ ta có $nx^{n+1} - (n+1)x^n = n(x^{n+1} - 2x^n + x^{n-1}) + (n-1)x^n - nx^{n-1}$ $= nx^{n-1}(x-1)^2 + (n-1)x^n - nx^{n-1}$	0,5
Áp dụng liên tiếp kết quả trên với các giá trị n từ 2024 đến 2 ta được	0,5

$ \begin{aligned} p(x) &= 2024x^{2025} - 2025x^{2024} + 1 = 2024x^{2023}(x-1)^2 + (2023x^{2024} - 2024x^{2023}) + 1 \\ &= 2024x^{2023}(x-1)^2 + 2023x^{2022}(x-1)^2 + (2022x^{2023} - 2023x^{2022}) + 1 \\ &= 2024x^{2023}(x-1)^2 + 2023x^{2022}(x-1)^2 + \dots + 2x(x-1)^2 + (x^2 - 2x) + 1 \\ &= 2024x^{2023}(x-1)^2 + 2023x^{2022}(x-1)^2 + \dots + 2x(x-1)^2 + (x-1)^2 \end{aligned} $	
$\Rightarrow h(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + 2023x^{2022} + 2024x^{2023}$	0,5
$\Rightarrow h(1) = 1 + 2 + 3 + \dots + 2023 + 2024 = \frac{2024 \cdot 2025}{2} = 1012 \cdot 2025$	0,5

Câu 4. (2,0 điểm). Giải phương trình: $x^3 - 9x^2 + 6x + 2\sqrt{(3x-2)^3} = 0$.

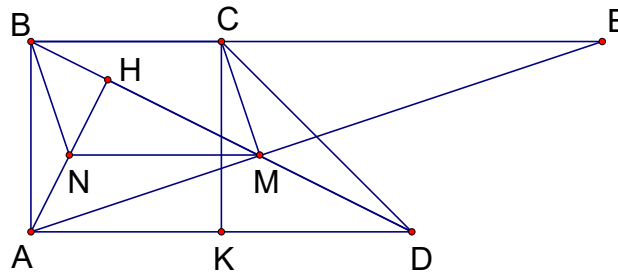
Nội dung	Điểm
Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$ $x^3 - 9x^2 + 6x + 2\sqrt{(3x-2)^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x(3x-2) + 2\sqrt{(3x-2)^3} = 0$	0,5
Đặt $a = x^3, b = \sqrt{3x-2} \Rightarrow$ $x^3 - 3x(3x-2) + 2\sqrt{(3x-2)^3} = 0 \Leftrightarrow a^3 - 3ab^2 + 2b^3 = 0$ $\Leftrightarrow (a-b)^2(a+2b) = 0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{3x-2})^2(x+2\sqrt{3x-2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{3x-2} = 0(1) \\ x+2\sqrt{3x-2} = 0(2) \end{cases}$	0,5
$(1) \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$	0,5
Do $x \geq \frac{2}{3}$ nên (2) vô nghiệm Vậy phương trình có hai nghiệm $x \in \{1; 2\}$	0,5

Câu 5. (2,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (y^2 - 3x + 5)\sqrt{x+y} = 2\sqrt{x-y} \\ (x^2 + y^2)(x+y) + 2xy = x+y \end{cases}$$

Nội dung	Điểm
Điều kiện $x+y \geq 0; x-y \geq 0$ Ta có $(x^2 + y^2)(x+y) + 2xy = x+y \Leftrightarrow (x+y)^2(x+y) - 2xy(x+y) + 2xy = x+y$ $\Leftrightarrow (x+y)[(x+y)^2 - 1] - 2xy(x+y-1) = 0$ $\Leftrightarrow (x+y-1)(x^2 + y^2 + x+y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x+y = 0 \\ x+y-1 = 0 \end{cases}$	0,5
TH1: $x^2 + y^2 + x+y = 0$ do $x+y \geq 0 \Rightarrow (x; y) = (0; 0)$ thử lại thỏa mãn hệ.	0,5
TH2: $x+y-1 = 0 \Rightarrow y = 1-x$ thế vào phương trình đầu ta được	0,5

$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 2\sqrt{2x-1} \left(x \geq \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 5) + (x + 1 - 2\sqrt{2x-1}) = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 - 6x + 5) + \frac{(x+1)^2 - 4(2x-1)}{x+1+2\sqrt{2x-1}} = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 5) \left(1 + \frac{1}{x+1+2\sqrt{2x-1}} \right) = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-4 \end{cases}$	
Vậy hệ có 3 nghiệm $(x; y) = (0; 0), (1; 0), (5; -4)$	0,5

Câu 6. (4,0 điểm). Cho hình thang $ABCD$ vuông ở đỉnh A và đỉnh B thỏa mãn $AD = 2AB = 2BC$. Gọi H chân đường vuông góc kẻ từ A đến BD .



a) Chứng minh $\triangle BHC \sim \triangle BCD$ và tính độ dài CH khi độ dài $AB = 4\text{cm}$.

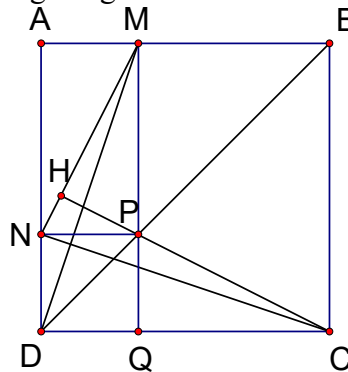
Nội dung	Điểm
Tam giác vuông ABD có đường cao AH nên ta có $AB^2 = BH \cdot BD$ Lại do $AB = BC \Rightarrow BC^2 = AH \cdot AD$	0,5
$\Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BC}{AD}$ nên ta có $\triangle BHC \sim \triangle BCD$	0,5
Kẻ $CK \perp AD \Rightarrow CK = AB = 4\text{cm}$; $AK = BC = \frac{1}{2}AD \Rightarrow KD = \frac{1}{2}AD = BC = 4\text{cm}$ Áp dụng công thức Pitago vào tam giác CKD ta có $CD = \sqrt{KC^2 + KD^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}\text{cm}$ Mặt khác tam giác ABD vuông nên ta có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}\text{cm}$	0,5
Lại do $\triangle BHC \sim \triangle BCD \Rightarrow HC = \frac{BC}{BD} \cdot CD = \frac{4}{4\sqrt{5}} \cdot 4\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{10}}{5}\text{cm}$	0,5

b) Gọi M là trung điểm của HD . Đường thẳng AM và BC cắt nhau tại điểm E . Chứng minh $EC \cdot EB = EM \cdot EA$.

Nội dung	Điểm
Gọi N là trung điểm của AH thì MN đường trung bình của tam giác HAD $\Rightarrow MN \parallel AD, MN = \frac{1}{2}AD \Rightarrow MN \parallel BC, MN = BC$ nên tứ giác $BCMN$ là hình bình hành $\Rightarrow CM \parallel BN$ (1)	0,5

Mặt khác $MN \parallel AD \Rightarrow MN \perp AB$ nên N là trực tâm của tam giác ABM $\Rightarrow BN \perp AM$ (2)	0,5
$\Rightarrow BN \perp AM$ (2)	0,5
Từ (1),(2) $\Rightarrow CM \perp AM$ nên hai tam giác vuông EMC và EBA đồng dạng	
$\Rightarrow \frac{EM}{EC} = \frac{EB}{EA} \Leftrightarrow EC.EB = EM.EA$	0,5

Câu 7. (2,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB, AD lần lượt lấy các điểm M, N thỏa mãn $AM = DN$. Kẻ CH vuông góc MN (H thuộc MN), đường thẳng qua M vuông góc với AB cắt CH tại P . Chứng minh ba điểm D, B, P thẳng hàng.



Nội dung	Điểm
Từ giả thiết dễ thấy hai tam giác vuông $\triangle CDM, \triangle DAM$ bằng nhau nên ta có $DM = CN$ (1) và $DM \perp CN$	0,5
Gọi Q là giao điểm MP với CD . Do $QC = MB = NA$ (2) và $\widehat{PCQ} = \widehat{NMQ} = \widehat{MNA}$ (3); $\widehat{NAM} = \widehat{CQP} = 90^\circ$ (4) $\Rightarrow \triangle CQP = \triangle NAM \Rightarrow CP = NM$ (5)	0,5
Mặt khác $\widehat{PCN} = \widehat{NMD}$ (6) (góc có cặp cạnh tương ứng vuông góc) Từ (1), (5), (6) $\Rightarrow \triangle PCN = \triangle NMD \Rightarrow NP = DN$	0,5
Mà $DN = AM \Rightarrow NP = AM \Rightarrow AMPN$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \triangle DNP$ vuông cân đỉnh N hay D, B, P thẳng hàng.	0,5

Câu 8 (2,0 điểm). Khi kí hợp đồng làm việc thời hạn 5 năm với người lao động được tuyển dụng mới, một công ty đưa ra ba phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu đồng, kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương tăng thêm 22 triệu so với năm trước.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 30 triệu đồng, kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tăng 1,5 triệu đồng so với quý trước (mỗi quý được tính bằng 3 tháng).

Phương án 3: Tháng thứ nhất, tiền lương là 6 triệu đồng, kể từ tháng thứ 2 trở đi, mỗi tháng tăng 300 nghìn đồng so với tháng trước.

Nếu là người lao động được tuyển dụng, em sẽ chọn phương án nào để khi kết thúc hợp đồng, tổng số tiền lương thu được là nhiều nhất?

Nội dung	Điểm
Phương án 1: 5 năm người lao động được nhận được tổng tiền lương là	0,5

$L_1 = 120 + (120 + 22) + (120 + 2.22) + (120 + 3.22) + (120 + 4.22)$ $= 6.120 + 22(1 + 2 + 3 + 4) = 5.120 + 22 \cdot \frac{4.5}{2} = 710$	
Phương án 2: 5 năm = 20 quý nên người lao động được nhận được tổng tiền lương là $L_2 = 30 + (30 + 1,5) + (30 + 2.1,5) + (30 + 3.1,5) + \dots + (30 + 19.1,5)$ $= 20.30 + 1,5(1 + 2 + 3 + \dots + 19) = 20.30 + 1,5 \cdot \frac{19.20}{2} = 885$	0,5
Phương án 3: 5 năm = 60 tháng nên người lao động được nhận được tổng tiền lương là $L_3 = 6 + (6 + 0,3) + (6 + 2.0,3) + (6 + 3.0,3) + \dots + (6 + 59.0,3)$ $= 60.6 + 0,3(1 + 2 + 3 + \dots + 59) = 60.6 + 0,3 \cdot \frac{59.60}{2} = 891$	0,5
Chọn phương án 3 người lao động nhận được tổng tiền lương nhiều nhất là 891 triệu đồng.	0,5

Câu 9 (2,0 điểm). Cho 3 số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $L = a^3 + b^3 + c^3$.

Nội dung	Điểm
$L = a^3 + b^3 + c^3 = (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b)$ $= (a+b+c)^3 - 3(a+b)c(a+b+c) - 3ab(a+b+c) + 3abc$ $= (a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(ab+bc+ca) + 3abc$ $= 27 - 9(ab+bc+ca) + 3abc$	0,5
Từ giả thiết ta có $(3-a)(3-b)(3-c) \geq 0 \Leftrightarrow 27 - 9(a+b+c) + 3(ab+bc+ca) - abc \geq 0$ $\Leftrightarrow 27 - 9.3 + 3(ab+bc+ca) - abc \geq 0 \Leftrightarrow abc \leq 3(ab+bc+ca)$	0,5
$L = 27 - 9(ab+bc+ca) + 3abc \leq 27 - 9(ab+bc+ca) + 9(ab+bc+ca) = 27$	0,5
Vậy giá trị lớn nhất của $L = 27$ khi $(a; b; c) = (0; 0; 3)$ và các hoán vị.	0,5

----- HẾT -----