

Đề chính thức

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 06/6/2023

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1: (2,0 điểm)

- Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$
- Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4} - \frac{4x+32}{x-16}$; $x \geq 0, x \neq 16$.
 - Rút gọn biểu thức P .
 - Tìm giá trị lớn nhất của P .

Bài 2: (2,0 điểm)

- Cho phương trình: $x^2 - (m+3)x + \frac{1}{4}m^2 + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn điều kiện $2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2 = 34$.
- Trong hệ toạ độ Oxy , cho các đường thẳng $(d): y = ax - 4$ và $(d_1): y = -3x + 2$.
 - Biết đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-1;5)$. Tìm a .
 - Tìm toạ độ giao điểm của (d_1) với trục hoành, trục tung. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng (d_1) .

Bài 3: (1,5 điểm) Trong kì thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT, cả hai trường A và B có tổng số 380 thí sinh dự thi. Sau khi có kết quả, số thí sinh trúng tuyển của cả hai trường là 191 thí sinh. Theo thống kê thì trường A có tỉ lệ trúng tuyển là 55% tổng số thí sinh dự thi của trường A, trường B có tỉ lệ trúng tuyển là 45% tổng số thí sinh dự thi của trường B. Hỏi mỗi trường có bao nhiêu thí sinh dự thi?

Bài 4: (3,5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có $AB < AC$, các đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H , đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại K .

- Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp.
- Chứng minh hai tam giác KBF và KEC đồng dạng, từ đó suy ra $KB \cdot KC = KF \cdot KE$.
- Đường thẳng AK cắt lại đường tròn (O) tại G khác A , chứng minh các điểm A, G, F, E, H cùng thuộc một đường tròn.
- Gọi I là trung điểm cạnh BC , chứng minh HI vuông góc với AK .

Bài 5: (1,0 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2024$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a}{a + \sqrt{2024a + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{2024b + ca}} + \frac{c}{c + \sqrt{2024c + ab}}$.

----- HẾT -----

Lời giải

Bài 1:

- Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$
- Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4} - \frac{4x+32}{x-16}; x \geq 0, x \neq 16$.
 - Rút gọn biểu thức P .
 - Tìm giá trị lớn nhất của P .

1. Ta có
$$\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 6 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 5 \cdot 1 + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

2.

a) Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4} - \frac{4x+32}{x-16} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4} - \frac{4x+32}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4) + 3\sqrt{x}(\sqrt{x}+4) - (4x+32)}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} = \frac{x - 4\sqrt{x} + 3x + 12\sqrt{x} - 4x - 32}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} \\ &= \frac{8\sqrt{x} - 32}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} = \frac{8(\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} = \frac{8}{\sqrt{x}+4} \end{aligned}$$

b) P lớn nhất $\Leftrightarrow \sqrt{x}+4$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$. Khi đó $P=2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 2.

Bài 2:

1. $x^2 - (m+3)x + \frac{1}{4}m^2 + 1 = 0$

Ta có $\Delta = (m+3)^2 - 4\left(\frac{1}{4}m^2 + 1\right) = m^2 + 6m + 9 - m^2 - 4 = 6m + 5$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 6m + 5 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{5}{6} (*)$

Khi điều kiện (*) được thỏa, phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 , theo định lý Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 3 & (1) \\ x_1 x_2 = \frac{1}{4}m^2 + 1 & (2) \end{cases}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} 2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1 x_2 &= 34 \Leftrightarrow 2(m+3)^2 - 8 \cdot \left(\frac{1}{4}m^2 + 1\right) = 34 \\ &\Leftrightarrow 2(m^2 + 6m + 9) - 2m^2 - 8 = 34 \\ &\Leftrightarrow 12m = 24 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (Thỏa (*))} \end{aligned}$$

Vậy giá trị cần tìm là $m = 2$.

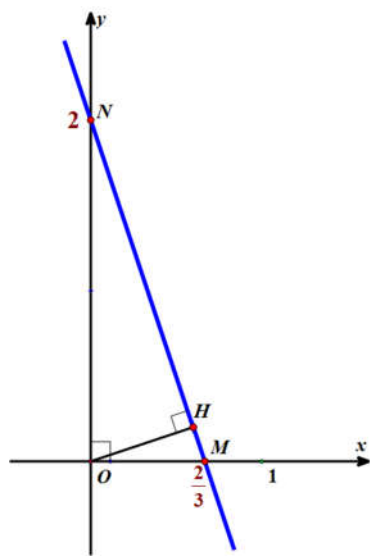
2.

a) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-1;5) \Leftrightarrow 5 = a \cdot (-1) - 4 \Leftrightarrow 5 = -a - 4 \Leftrightarrow a = -9$.

b) Cho $y = 0$ thay vào phương trình đường thẳng (d_1) ta được: $0 = -3x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

Vậy (d_1) cắt trục hoành tại điểm $M\left(\frac{2}{3}; 0\right)$.

Cho $x = 0$ thay vào phương trình đường thẳng (d_1) ta được $y = 2$. Vậy (d_1) cắt trục tung tại điểm $N(0;2)$.



Ta có $OM = \frac{2}{3}$, $ON = 2$. Trong tam giác vuông OMN ta vẽ đường cao OH , khi đó:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow OH^2 = \frac{2}{5} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Vậy khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d_1) là

$$OH = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Bài 3:

Cách 1: Gọi x, y lần lượt là số học sinh dự thi của mỗi trường A, B. Điều kiện x, y nguyên dương.

Cả hai trường A và B có tổng số 380 thí sinh dự thi nên: $x + y = 380$ (1)

Số thí sinh trúng tuyển của trường A và B lần lượt là: $\frac{55}{100}x$ (thí sinh), $\frac{45}{100}y$ (thí sinh).

Số thí sinh trúng tuyển của cả hai trường là 191 thí sinh nên:

$$\frac{55}{100}x + \frac{45}{100}y = 191 \Leftrightarrow 11x + 9y = 3820 \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $y = 380 - x$ thay vào (2) ta được: $11x + 9(380 - x) = 3820 \Leftrightarrow 2x = 400 \Rightarrow x = 200$

Suy ra $y = 180$. Vậy số thí sinh dự thi của mỗi trường A, B lần lượt là 200 và 180.

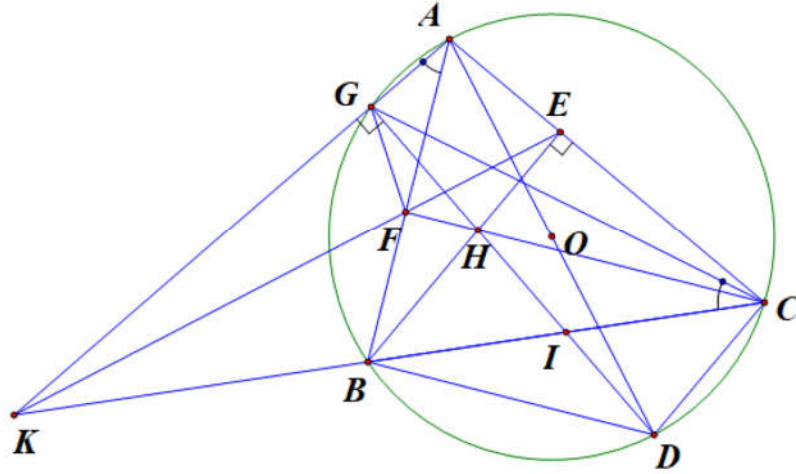
Cách 2: Gọi x là số thí sinh dự thi trường A. Điều kiện: x nguyên dương, $x < 380$ (*)

Số thí sinh dự thi trường B là $380 - x$. Theo đề bài ta lập được phương trình:

$$0,55x + 0,45(380 - x) = 191 \Leftrightarrow 0,1x = 20 \Leftrightarrow x = 200 \text{ (thỏa (*))} \Rightarrow y = 180$$

Vậy có 200 thí sinh dự thi trường A và 180 thí sinh dự thi trường B.

Bài 4:



- BE và CF là các đường cao của tam giác ABC nên $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$. Vậy các điểm E, F cùng nhìn đoạn BC dưới một góc vuông nên các điểm E, F, B, C cùng nằm trên đường tròn đường kính BC . Hay tứ giác $BCEF$ nội tiếp.
- Tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\widehat{BCF} = \widehat{BEF}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{BF}$)
Ta có $\widehat{KBF} = \widehat{BCF} + \widehat{CFB}$ (Góc ngoài tam giác) $= \widehat{BEF} + 90^\circ = \widehat{BEF} + \widehat{BEC} = \widehat{KEC}$
Xét hai tam giác KBF và KEC ta có: $\widehat{BKF} = \widehat{EKC}$ (Góc chung), $\widehat{KBF} = \widehat{KEC}$, do đó hai tam giác này đồng dạng. Suy ra $\frac{KB}{KE} = \frac{KF}{KC} \Rightarrow KB.KC = KF.KE$.
- Ta có: $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ \Rightarrow 4$ điểm A, E, H, F cùng nằm trên đường tròn đường kính AH .
Xét hai tam giác KAB và KCG :
 $\widehat{AKB} = \widehat{CKG}$ (Góc chung), $\widehat{KAB} = \widehat{KCG}$ (Góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{BG}$)
Vậy hai tam giác nói trên là đồng dạng do đó: $\frac{KA}{KC} = \frac{KB}{KG} \Rightarrow KG.KA = KB.KC = KF.KE$.
Suy ra: $\frac{KG}{KE} = \frac{KF}{KA}$, kết hợp với $\widehat{GKF} = \widehat{EKA}$ (Góc chung) nên hai tam giác KGF và KEA đồng dạng.
Suy ra $\widehat{AEK} = \widehat{FGK}$ (Góc tương ứng).
Tứ giác $AGFE$ có: $\widehat{AGF} + \widehat{AEF} = \widehat{AGF} + \widehat{AEK} = \widehat{AGF} + \widehat{FGK} = 180^\circ$ (Kề bù)
Vậy tứ giác $AGFE$ nội tiếp.
Suy ra 5 điểm A, G, F, E, H cùng thuộc một đường tròn đường kính AH .
- Từ kết quả câu 3. ta suy ra $HG \perp AK$.
Vẽ đường kính AD khi đó ta có:
 $DG \perp AK$ (Góc $\widehat{DGA}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn)
Suy ra D, H, G thẳng hàng.

$$\begin{cases} BH \perp AC \\ DC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BH \parallel DC$$

Tương tự ta cũng có $CH \parallel BD$, suy ra tứ giác $BDCH$ là hình bình hành. Vậy I là trung điểm của HD hay G, H, I, D thẳng hàng. Do đó HI vuông góc với AK .

Bài 5. (1,0 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2024$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$\text{biểu thức } P = \frac{a}{a + \sqrt{2024a + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{2024b + ca}} + \frac{c}{c + \sqrt{2024c + ab}}.$$

$$\text{Ta có } \sqrt{2024a + bc} = \sqrt{(a + b + c)a + bc} = \sqrt{(a + b)(a + c)} \leq \frac{a + b + a + c}{2} = \frac{2a + b + c}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{a + \sqrt{2024a + bc}} &= \frac{a(a - \sqrt{(a + b)(a + c)})}{(a + \sqrt{(a + b)(a + c)})(a - \sqrt{(a + b)(a + c)})} \\ &= \frac{a(a - \sqrt{(a + b)(a + c)})}{a^2 - (a + b)(a + c)} = \frac{a^2 - a\sqrt{(a + b)(a + c)}}{-ab - bc - ca} = \frac{a\sqrt{(a + b)(a + c)} - a^2}{ab + bc + ca} \\ &\leq \frac{a\left(\frac{2a + b + c}{2}\right) - a^2}{ab + bc + ca} = \frac{ab + ac}{2(ab + bc + ca)} \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự ta cũng có: } \frac{b}{b + \sqrt{2024b + ca}} \leq \frac{bc + ba}{2(ab + bc + ca)}, \quad \frac{c}{c + \sqrt{2024c + ab}} \leq \frac{ca + cb}{2(ab + bc + ca)}$$

Suy

$$\begin{aligned} P &= \frac{a}{a + \sqrt{2024a + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{2024b + ca}} + \frac{c}{c + \sqrt{2024c + ab}} \leq \frac{ab + ac}{2(ab + bc + ca)} + \frac{bc + ba}{2(ab + bc + ca)} + \frac{ca + cb}{2(ab + bc + ca)} \\ &\leq \frac{2(ab + bc + ca)}{2(ab + bc + ca)} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{2024}{3}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1.