

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: Toán lớp 9
Thời gian: 150 phút (không kể thời gian phát đề)
Ngày thi: 15/10/2023

Bài 1: (3 điểm)

Cho biểu thức $Q = 1 + \left(\frac{x+1}{x^3+1} - \frac{1}{x-x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x}$

a, Rút gọn Q

b, Tìm giá trị nguyên của x để Q có giá trị nguyên

Bài 2: (6 điểm)

a, Tìm hệ số a để đa thức $f(x) = x^3 - 8x^2 + ax - 5$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 - 3x + 1$

b, Cho n là một số tự nhiên lẻ. Chứng minh $n^3 - n$ chia hết cho 24.

c, Tìm các số dương x, y, z thỏa mãn
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x + y + z + xy + yz + zx = 6 \end{cases}$$

Bài 3: (3 điểm)

Cho $\triangle ABC$ có đường phân giác trong AD. Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $\widehat{ECD} = \widehat{BAD}$.

a, Chứng minh $AD \cdot DE = BD \cdot CD$.

b, Chứng minh $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$.

Bài 4: (4 điểm)

a, Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sqrt{x^2 - 12x + 36} + \sqrt{x^2 - 16x + 64}$

b, Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 6$. Chứng minh rằng $\frac{x+y}{xyz} \geq \frac{4}{9}$

Bài 5: (4 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn và một điểm P thuộc miền trong tam giác. Gọi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của P trên các cạnh BC, CA, AB

a, Chứng minh $BD^2 + CE^2 + AF^2 = DC^2 + EA^2 + FB^2$

b, Xác định vị trí điểm P trong $\triangle ABC$ để tổng $DC^2 + EA^2 + FB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

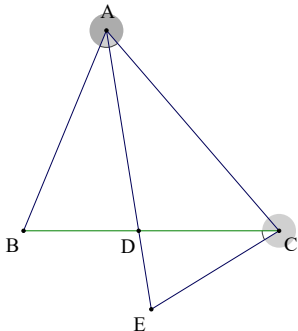
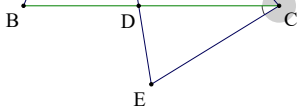
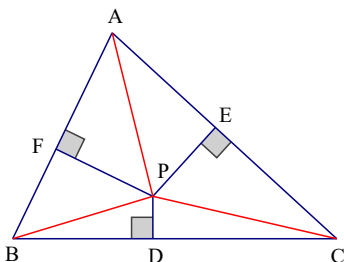
(Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.)

HƯỚNG DẪN CHẤM BÀI THI

Môn: Toán lớp 9

(Gồm có 03 trang)

Bài	Yêu cầu cần đạt	Điểm
Bài 1a	$\text{a, ĐK: } x \neq 0; -1; 2. \text{Ta có: } Q = 1 + \left(\frac{x+1}{x^3+1} - \frac{1}{x-x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x}$ $= 1 + \frac{x+1+x+1-2(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{x(x-2)}$	0,75 điểm
	$= 1 + \frac{-2x^2+4x}{(x-1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{x(x-2)} = 1 + \frac{-2x(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{x(x-2)}$	0,75 điểm
	$= 1 + \frac{-2}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$	0,5 điểm
Bài 1b	Lập luận để $Q \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-3; -2; 1\}$	1,0 điểm
Bài 2a	Thực hiện phép chia đa thức, tìm được phần dư là: $(a-16)x$	0,75 điểm
	Để $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ thì $(a-16)x$ là đa thức không $\Leftrightarrow (a-16)x = 0, \forall x$	0,75 điểm
	$\Leftrightarrow a-16=0 \Leftrightarrow a=16$	0,5 điểm
Bài 2b	Ta có: $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ Vì $n-1, n, n+1$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên sẽ có một số chia hết cho 3. Do đó: $n(n-1)(n+1)$ chia hết cho 3	0,75 điểm
	Vì $n-1, n, n+1$ là ba số tự nhiên liên tiếp và n là số lẻ nên sẽ có một số chia hết cho 2 và một số chia hết cho 4. Do đó: $n(n-1)(n+1)$ chia hết cho 8	0,75 điểm
	Mà 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $n(n-1)(n+1)$ chia hết cho 24 Vậy $n^3 - n$ chia hết cho 24 (đpcm)	0,5 điểm
Bài 2c	Từ GT ta suy ra: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ 2(x+y+z) + 2xy + 2yz + 2zx = 12 \end{cases}$ Cộng vế theo vế ta được: $(x+y+z)^2 + 2(x+y+z) = 15$	0,5 điểm
	$\Rightarrow [(x+y+z) + 1]^2 = 16$ $\Rightarrow x+y+z = 3 \text{ (vì } x, y, z > 0)$ $\Rightarrow xy + yz + zx = 3$ $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ $\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0$ $\Rightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$	1,0 điểm

	$\Rightarrow x = y = z$ Thay $x = y = z$ vào giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ suy ra $x = y = z = 1$.	0,5điểm	
3a		*Chứng minh $AD.DE = BD.CD$. - Chứng tỏ được hai tam giác ADB và CDE đồng dạng theo trường hợp góc – góc Suy ra $\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{DE} \Rightarrow AD.DE = BD.CD$ (1)	1điểm
3b		* Chứng minh $AD^2 = AB.AC - BD.CD$. - Chứng tỏ hai tam giác ABD và AEC đồng dạng, suy ra $AD.AE = AB.AC$ (2) - Lấy (2) trừ (1) theo vế sẽ được kết quả : $AD^2 = AB.AC - BD.CD$	1điểm
Bài 4a	$A = \sqrt{x^2 - 12x + 36} + \sqrt{x^2 - 16x + 64} = \sqrt{(x - 6)^2} + \sqrt{(x - 8)^2}$	0,5 điểm	
	$A = x - 6 + x - 8 = x - 6 + 8 - x \geq x - 6 + 8 - x = 2$	0,75 điểm	
	Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2 khi $(x - 6)(8 - x) \geq 0$ hay $6 \leq x \leq 8$.	0,75 điểm	
Bài 4b	Ta có: $(x + y)^2 \geq 4xy$ (1)	0,5 điểm	
	$\Rightarrow [(x + y) + z]^2 \geq 4(x + y)z \Leftrightarrow 36 \geq 4(x + y)z$ (vì $x + y + z = 6$)	0,5 điểm	
	$\Leftrightarrow 36(x + y) \geq 4(x + y)^2 z$ (vì x, y dương nên $x + y$ dương) (2)	0,5 điểm	
	Từ (1) và (2), ta có: $36(x + y) \geq 16xyz$ $\Leftrightarrow x + y \geq \frac{4}{9}xyz \Leftrightarrow \frac{x + y}{xyz} \geq \frac{4}{9}$ (đpcm)	0,5 điểm	
Bài 5a		* $BD^2 + CE^2 + AF^2 = DC^2 + EA^2 + FB^2$ Ta có: $BD^2 + CE^2 + AF^2$ $= (PB^2 - PF^2) + (PC^2 - PD^2) + (PA^2 - PE^2)$	1điểm
	$\Rightarrow BD^2 + CE^2 + AF^2 = FB^2 + DC^2 + EA^2$	1điểm	
Bài 5b	Giả sử: $BD \geq DC \Rightarrow BD - DC \geq 0$ $\Rightarrow (BD - DC)^2 \geq 0 \Rightarrow BD^2 + DC^2 \geq 2BD.DC$	0,5điểm	
	$\Rightarrow 2(BD^2 + DC^2) \geq BD^2 + 2BD.DC + DC^2$ $\Rightarrow 2(BD^2 + DC^2) \geq BC^2 \Rightarrow BD^2 + DC^2 \geq \frac{BC^2}{2}$	0,5điểm	

Chứng minh tương tự: $BD^2 + DC^2 \geq \frac{BC^2}{2}$; $CE^2 + AE^2 \geq \frac{AC^2}{2}$; $BF^2 + AF^2 \geq \frac{AB^2}{2}$ Từ đó suy ra: $DC^2 + EA^2 + FB^2 \geq \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$; $BD^2 + DC^2 \geq \frac{BC^2}{2}$ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi D là trung điểm của BC Nên tổng $DC^2 + EA^2 + FB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB nghĩa là P là giao điểm của các đường trung trực của các cạnh BC, CA, AB.	<i>1 điểm</i>
--	----------------------

Điểm số toàn bài được làm tròn đến một chữ số thập phân;
mọi cách giải khác đúng và phù hợp với chương trình nâng cao bậc THCS đều được chấp nhận
.....o0o.....