

Câu I (4,5 điểm).

Cho hai biểu thức $P = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$, với $x > 0, x \neq 4$

1. Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 10 - (\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}})$
2. Rút gọn biểu thức Q .

3. Tìm giá trị của x để biểu thức $\frac{P}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu II (4,5 điểm).

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba đường thẳng $d_1: y = -x + 2$, $d_2: y = 2x + 3 - k$, $d_3: y = -2(k+1)x - k - 3$ (k là tham số).

- a) Tìm giá trị của k để đường thẳng d_2 đi qua gốc tọa độ.
- b) Tìm giá trị của k để đường thẳng d_1 cắt đường thẳng d_2 tại một điểm nằm trên trục hoành.
- c) Chứng minh rằng khi k thay đổi, các đường thẳng d_3 luôn đi qua một điểm cố định. Tìm điểm cố định đó.

2. Giải phương trình sau: $\sqrt{x+9} = \sqrt{x} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}$

Câu III (3,5 điểm).

1. Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $2012x^{2015} + 2013y^{2018} = 2015$
2. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ và $x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 3^{2016}$. Tìm x, y, z .
3. Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn điều kiện $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1$. Tính giá trị của biểu thức: $T = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$

Câu IV (6,0 điểm).

Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng d cố định, d không có điểm chung với đường tròn. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d . Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Từ O kẻ OH vuông góc với đường thẳng d ($H \in d$). Nối A với B , AB cắt OH tại K và cắt OM tại I . Tia OM cắt $(O; R)$ tại E .

- a) Chứng minh rằng năm điểm A, O, B, H, M cùng thuộc một đường tròn.
- b) Chứng minh rằng $OK.OH = OI.OM$.
- c) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB .
- d) Tìm vị trí của M trên đường thẳng d để diện tích tam giác OIK đạt giá trị lớn nhất.

Câu V (1,5 điểm).

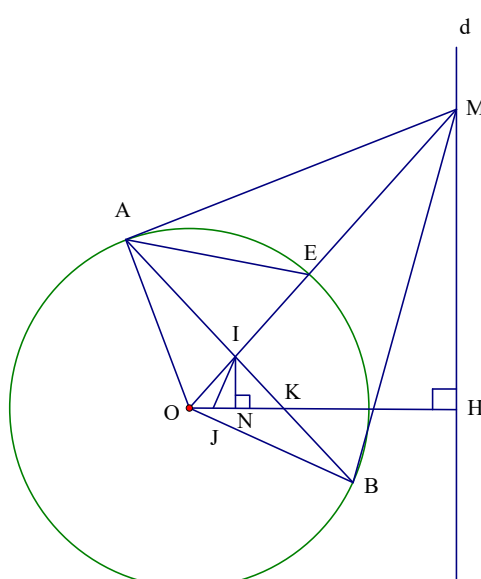
Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}$$

..... HẾT

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu I	1 (1,0)	$x = 10 - (\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}) = 10 - (\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2})$ $= 10 - (\sqrt{3} - 1 + 2 - \sqrt{3}) = 10 - 1 = 9$	0,5
		Với $x = 9 \Rightarrow P = \frac{9+3}{\sqrt{9}-2} = \frac{12}{3-2} = 12$	0,5
	2 (1,5đ)		
		với $x > 0, x \neq 4$ ta có $Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$	0,5
		$Q = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$	0,5
		$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)}$	0,5
	3 (2,0đ)		
		Với $x > 0, x \neq 4$ thì $\frac{P}{Q}$ được xác định.	0,25
		$\frac{P}{Q} = \frac{x+3}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$	0,5
		Áp dụng BĐT AM-GM ta có $\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{3}$.	0,5
		Đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 3$	0,5
		Vậy Min $Q = 2\sqrt{3}$ Khi $x = 3$	0,25
II	1	a) $d_2 : y = 2x + 3 - k$ đi qua gốc tọa độ thì $x = 0, y = 0$ và $3 - k = 0 \Leftrightarrow k = 3$	0,5
		b) Ta thấy d_1 và d_2 luôn cắt nhau	0,25
		Đường thẳng d_1 cắt trục hoành tại điểm $A(2;0)$	0,25
		Đường thẳng d_2 cắt trục hoành tại điểm $B(\frac{k-3}{2};0)$	0,25
		Để hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau tại một điểm trên trục hoành thì $A \equiv B$ tức là $\frac{k-3}{2} = 2 \Leftrightarrow k = 7$	0,5

		Vậy $k = 7 \dots$	0,25
	2	Giả sử $M(x_0; y_0)$ là một điểm cố định mà mọi đường thẳng đã cho luôn đi qua thì phương trình $2(k+1)x_0 + y_0 + 3 + k = 0$ (1) luôn đúng với mọi k Ta có (1) $\Leftrightarrow (2x_0 + 1)k + 2x_0 + y_0 + 3 = 0$	0,5
		ĐK để phương trình này luôn đúng với mọi k là $\begin{cases} 2x_0 + 1 = 0 \\ 2x_0 + y_0 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{1}{2} \\ y_0 = -2 \end{cases}$	0,5
		$\Rightarrow M(-\frac{1}{2}; -2)$	0,25
		Thay tọa độ điểm $M(-\frac{1}{2}; -2)$ vào d_3 ta thấy luôn đúng với mọi k. Vậy điểm cố định cần tìm là $M(-\frac{1}{2}; -2)$	0,25
		ĐK $x \geq 0$	0,25
		PT $\sqrt{x+9} = \sqrt{x} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow x+9 = x + \frac{8}{x+1} + \frac{4\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}}$	0,25
		$\Leftrightarrow \frac{9x+1}{x+1} - \frac{4\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}} = 0 \Leftrightarrow \frac{8x}{x+1} - \frac{4\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}} + 1 = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow (\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}} = 1 \Leftrightarrow 8x = x+1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}$ (TMĐK)	0,25
III	1		
		Với mọi x nguyên thì $2012x^{2015} : 4$ nên là số chẵn	0,25
		+) Nếu y chẵn thì y^{2018} là số chẵn nên $2013y^{2018}$ là số chẵn	0,25
		$\Rightarrow 2012x^{2015} + 2013y^{2018}$ là số chẵn	
		mà 2015 là số lẻ nên PTVN	0,25
		+) Nếu y lẻ thì y^{1009} là số lẻ, Đặt $y^{1009} = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$ $2013y^{2018} = 2013(2k+1)^2 = 2013(4k^2 + 4k + 1) = 4 \cdot 2013(k^2 + k) + 2013$ chia cho 4 dư 1 nên $2012x^{2015} + 2013y^{2018}$ chia cho 4 dư 1, mà 2015 chia cho 4 dư 3.	0,5
		Vậy không có số nguyên x, y nào thỏa mãn ycbt	0,25
	2	Từ $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow x = y = z$	0,25
		Khi đó $x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 3x^{2015} = 3^{2016} \Leftrightarrow x^{2015} = 3^{2015} \Leftrightarrow x = 3$	0,5

		Vậy $x = y = z = 3$	0,25
		Từ $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1 - xy \Rightarrow (1+x^2)(1+y^2) = (1-xy)^2$	0,25
	3	$\Leftrightarrow 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1 - 2xy + x^2y^2$	0,25
		$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -x$	0,25
		Với $y = -x \Rightarrow T = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = x\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{1+x^2} = 0$	0,25
IV	6,0 điểm		0,25
		a) MA là tiếp tuyến của đường tròn $(O) \Rightarrow \widehat{OAM} = 90^\circ$ $\Rightarrow A \in$ đường tròn đường kính OM Tương tự ta có $B \in$ đường tròn đường kính OM	0,25
		$OH \perp d$ (gt) $\Rightarrow \widehat{OHM} = 90^\circ \Rightarrow H \in$ đường tròn đường kính OM	0,25
		Vậy 5 điểm A, O, B, H, M cùng thuộc đường tròn đường kính OM	0,25
		b) Ta có $MA = MB$ (theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow M \in$ trung trực của AB (1)	0,5
		$OA = OB (= R) \Rightarrow O \in$ trung trực của AB (2)	0,5
		Từ (1) và (2) $\Rightarrow OM$ là trung trực của $AB \Rightarrow OM \perp AB$ tại I	0,5
		Xét $\triangle OIK$ và $\triangle OHM$ Có $\hat{I} = \hat{H} = 90^\circ$, $\hat{O}$ chung $\Rightarrow \triangle OIK \sim \triangle OHM$ (g.g) $\Rightarrow \frac{OI}{OH} = \frac{OK}{OM} \Rightarrow OK \cdot OH = OI \cdot OM$	1,0
		c) Ta có MI là tia phân giác của $\widehat{AMB}$ (theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau) (3)	0,25

		Lại có $\widehat{IAE} + \widehat{IEA} = 90^\circ$, $\widehat{IEA} = \widehat{OAE}$ (vì $\triangle OAE$ cân tại O) $\Rightarrow \widehat{OAE} + \widehat{IAE} = 90^\circ$	0,25
		mà $\widehat{OAE} + \widehat{MAE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IAE} = \widehat{MAE}$ $\Rightarrow AE$ là tia phân giác của $\widehat{MAB}$ (4)	0,25
		Từ (3) và (4) suy ra E là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$	0,25
		d) $\triangle OAM$ vuông tại A , có $AI \perp OM \Rightarrow OI \cdot OM = OA^2 = R^2$	0,25
		Theo chứng minh trên $OK \cdot OH = OI \cdot OM$ $\Rightarrow OK \cdot OH = R^2 \Rightarrow OK = \frac{R^2}{OH}$. R, OH không đổi $\Rightarrow K$ cố định $\Rightarrow OK$ không đổi	0,25
		Gọi IN là đường cao của $\triangle OIK$, J là trung điểm của ON Ta có $S_{OIK} = \frac{IN \cdot OK}{2} \Rightarrow S_{OIK}$ lớn nhất $\Leftrightarrow IN$ lớn nhất	0,25
		Lại có $IN \leq IJ = \frac{OK}{2} \Rightarrow IN_{\max} = \frac{OK}{2} \Leftrightarrow N \equiv J \Leftrightarrow \triangle IOK$ vuông cân $\Leftrightarrow \triangle OMH$ vuông cân $\Leftrightarrow MH = HO$	0,25
		Vậy diện tích tam giác OIK có giá trị lớn nhất khi $MH = HO$	0,25
Câu V	1,5 điểm		
		Vì a, b, c là các số thực dương nên Áp dụng BĐT AM-GM ta có: $a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab} \leq a \cdot \frac{b+c}{2} + b \cdot \frac{a+c}{2} + c \cdot \frac{a+b}{2}$	0,25
		$\Rightarrow a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab} \leq ab + bc + ca = 3$ (1)	0,25
		Mặt khác $3(a^4 + b^4 + c^4) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq (ab + bc + ca)^2 = 9$	0,5
		$\Rightarrow 3 \leq a^4 + b^4 + c^4$ (2)	0,25
		Từ (1) và (2) ta có ĐPCM	0,25

Chú ý:

- 1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
- 2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.
- 3) Điểm bài thi là tổng điểm không làm tròn.