

Ghi chú:- Đề thi này có 01 trang**- Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay****Câu 1. (2.0 điểm)**

Tìm các số a, b sao cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + 5x - 50$ chia hết cho đa thức $x^2 + 3x - 10$

Câu 2. (2.0 điểm)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Hỏi tam giác ABC là tam giác gì?

Câu 3. (2.0 điểm)

Giải phương trình $\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ca} + \frac{x-c}{ab} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$. Biết a, b, c là các số khác 0

và thỏa mãn điều kiện $a+b+c \neq 0$

Câu 4. (2.0 điểm)

Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Câu 5. (2.0 điểm)

Tìm các số nguyên x, y, z sao cho $(x-y)^3 + 3(y-z)^2 + 5|z-x| = 35$

Câu 6. (2.0 điểm)

Cho điểm O thuộc miền trong của tam giác ABC. Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh của tam giác ABC lần lượt tại G, E, F.

Chứng minh rằng: $\frac{OA}{AG} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = 2$

Câu 7. (2.0 điểm)

Cho ba số nguyên x, y, z có tổng chia hết cho 6. Chứng minh rằng biểu thức $M = (x+y)(y+z)(z+x) - 2xyz$ chia hết cho 6.

Câu 8. (4.0 điểm)

Hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có hai đường chéo cắt nhau tại O. Đường thẳng qua O và song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự ở M và N.

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$.

b) Biết $S_{AOB} = 2022^2$; $S_{COD} = 2023^2$. Tính S_{ABCD}

Câu 9. (2.0 điểm)

Trên tờ giấy kẻ vô hạn các ô vuông và được tô bởi các màu đỏ hoặc xanh thỏa mãn: bất cứ hình chữ nhật nào có kích thước 2×3 thì có đúng hai ô màu đỏ. Hỏi hình chữ nhật có kích thước 2022×2023 có bao nhiêu ô màu đỏ.

----- Hết -----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!

ĐỀ CHÍNH THỨC

Ghi chú: - Đề thi này có 01 trang

- Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay

Câu 1. (2.0 điểm)

Tìm các số a, b sao cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + 5x - 50$ chia hết cho đa thức $x^2 + 3x - 10$

Câu 2. (2.0 điểm)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Hỏi tam giác ABC là tam giác gì?

Câu 3. (2.0 điểm)

Giải phương trình $\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ca} + \frac{x-c}{ab} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$. Biết a, b, c là các số khác 0 và thỏa mãn điều kiện $a + b + c \neq 0$

Câu 4. (2.0 điểm)

Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Câu 5. (2.0 điểm)

Tìm các số nguyên x, y, z sao cho $(x-y)^3 + 3(y-z)^2 + 5|z-x| = 35$.

Câu 6. (2.0 điểm)

Cho điểm O thuộc miền trong của tam giác ABC. Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh của tam giác ABC lần lượt tại G, E, F.

Chứng minh rằng: $\frac{OA}{AG} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = 2$.

Câu 7. (2.0 điểm)

Cho ba số nguyên x, y, z có tổng chia hết cho 6. Chứng minh rằng biểu thức $M = (x+y)(y+z)(z+x) - 2xyz$ chia hết cho 6.

Câu 8. (4.0 điểm)

Hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có hai đường chéo cắt nhau tại O. Đường thẳng qua O và song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự ở M, N.

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$

b) Biết $S_{AOB} = 2022^2$; $S_{COD} = 2023^2$. Tính S_{ABCD} .

Câu 9. (2.0 điểm)

Trên tờ giấy kẻ vô hạn các ô vuông và được tô bởi các màu đỏ hoặc xanh thỏa mãn: bất cứ hình chữ nhật nào có kích thước 2×3 thì có đúng hai ô màu đỏ. Hỏi hình chữ nhật có kích thước 2022×2023 có bao nhiêu ô màu đỏ.

-----Hết-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (2.0 điểm) Tìm các số a, b sao cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + 5x - 50$ chia hết cho đa thức $x^2 + 3x - 10$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$$

Vì $P(x)$ chia hết cho $x^2 + 3x - 10 \Rightarrow P(x)$ chia hết cho $x - 2$ và $x + 5$

$$\text{Suy ra: } P(2) = 8a + 4b - 40 = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 10 \quad (1)$$

$$P(-5) = -125a + 25b - 75 = 0 \Leftrightarrow -5a + b = 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) tính được: $a = 1; b = 8$

Vậy: $a = 1; b = 8$

Câu 2. (2.0 điểm) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Hỏi tam giác ABC là tam giác gì?

Lời giải:

$$\text{Ta có: } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b) - 3abc = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)^3 - 3(a + b)c(a + b + c) - 3ab(a + b + c) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c) \left[(a + b + c)^2 - 3(a + b)c - 3ab \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca - 3ca - 3bc - 3ab) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$$

Vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC $\Rightarrow a + b + c > 0$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a - b = b - c = c - a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b = c.$$

Vậy tam giác ABC đều.

Câu 3. (2.0 điểm) Giải phương trình $\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ca} + \frac{x-c}{ab} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$. Biết a, b, c là các số khác 0 và thỏa mãn điều kiện $a + b + c \neq 0$

Lời giải:

ĐK: $a + b + c \neq 0$ và a, b, c là các số khác 0

$$\text{Ta có: } \frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ca} + \frac{x-c}{ab} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-a)a}{abc} + \frac{(x-b)b}{cab} + \frac{(x-c)c}{abc} = 2\left(\frac{bc}{abc} + \frac{ac}{bac} + \frac{ab}{cab}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)x - (a^2 + b^2 + c^2)}{abc} = \frac{2ab + 2bc + 2ca}{abc}$$

$$\Rightarrow (a + b + c)x = (a + b + c)^2 \quad (\text{vì } abc \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)} \text{ (vì } a+b+c \neq 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow x = a+b+c$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm: $x = a+b+c$.

Câu 4. (2.0 điểm) Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Lời giải:

Gọi hai số chính phương liên tiếp là n^2 và $(n+1)^2$ ($n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } n^2 + (n+1)^2 + n^2(n+1)^2 &= 2n^2 + 2n + 1 + (n^2 + n)^2 \\ &= 2n^2 + 2n + 1 + n^4 + 2n^3 + n^2 \\ &= n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1 \\ &= (n^4 + n^3 + n^2) + (n^3 + n^2 + n) + (n^2 + n + 1) \\ &= n^2(n^2 + n + 1) + n(n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 1) \\ &= (n^2 + n + 1)(n^2 + n + 1) \\ &= (n^2 + n + 1)^2 \\ &= [n(n+1) + 1]^2 \end{aligned}$$

Do $n(n+1)$ chẵn $\Rightarrow n(n+1) + 1$ lẻ $\Rightarrow [n(n+1) + 1]^2$ là số chính phương lẻ (đpcm)

Câu 5. (2.0 điểm) Tìm các số nguyên x, y, z sao cho $(x-y)^3 + 3(y-z)^2 + 5|z-x| = 35$.

Lời giải:

$$(x-y)^3 + 3(y-z)^2 + 5|z-x| = 35 \quad (*)$$

Đặt $x-z=a$; $y-z=b$ (a, b nguyên) $\Rightarrow x-y=a-b$

(*) trở thành: $(a-b)^3 + 3b^2 + 5|a| = 35$ là số lẻ (1)

+) TH1: a, b cùng tính chẵn lẻ thì: $a-b$ chẵn $\Rightarrow (a-b)^3$ chẵn; $3b^2 + 5|a|$ chẵn

$$\Rightarrow (a-b)^3 + 3b^2 + 5|a| \text{ chẵn (loại)}$$

$\Rightarrow$ không tồn tại a, b nguyên thỏa mãn (1)

$\Rightarrow$ không tồn tại x, y, z nguyên thỏa mãn (*)

+) TH2: a, b khác tính chẵn lẻ thì: $a-b$ lẻ $\Rightarrow (a-b)^3$ lẻ; $3b^2 + 5|a|$ lẻ

$$\Rightarrow (a-b)^3 + 3b^2 + 5|a| \text{ chẵn (loại)}$$

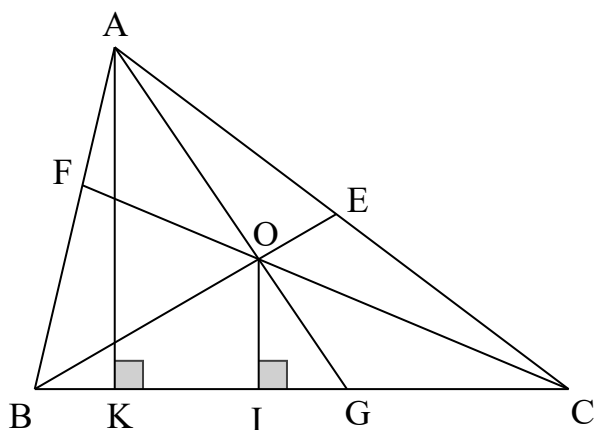
$\Rightarrow$ không tồn tại a, b nguyên thỏa mãn (1)

$\Rightarrow$ không tồn tại x, y, z nguyên thỏa mãn (*)

Tóm lại: Không tồn tại x, y, z nguyên thỏa mãn đề bài.

Câu 6. (2.0 điểm) Cho điểm O thuộc miền trong của tam giác ABC . Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh của tam giác ABC lần lượt tại G, E, F . Chứng minh rằng: $\frac{OA}{AG} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = 2$.

Lời giải:



Kẻ $OI \perp BC$ ($I \in BC$); $AK \perp BC$ ($K \in BC$)

ΔAKG có: $OI \parallel AK$ (cùng $\perp BC$).

$$\Rightarrow \frac{OI}{AK} = \frac{OG}{AG} \quad (1) \quad (\text{Hệ quả Ta-lét})$$

$$\text{Lại có: } \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot OI}{\frac{1}{2}BC \cdot AK} = \frac{OI}{AK} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{OG}{AG} = \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{OE}{BE} = \frac{S_{OAC}}{S_{ABC}}; \frac{OF}{CF} = \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}}$$

$$\text{Do đó: } \frac{OG}{AG} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{OAC}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{AG - OA}{AG} + \frac{BE - OB}{BE} + \frac{CF - OC}{CF} = 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{OA}{AG} + 1 - \frac{OB}{BE} + 1 - \frac{OC}{CF} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{AG} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = 2 \quad (\text{đpcm})$$

Câu 7. (2.0 điểm) Cho ba số nguyên x, y, z có tổng chia hết cho 6. Chứng minh rằng biểu thức $M = (x + y)(y + z)(z + x) - 2xyz$ chia hết cho 6.

Lời giải:

$$\begin{aligned} M &= (x + y)(y + z)(z + x) - 2xyz \\ &= (xy + xz + y^2 + yz)(z + x) - 2xyz \\ &= [y(x + y + z) + zx](z + x) - 2xyz \\ &= y(x + y + z)(z + x) + zx(x + y + z) - 3xyz \\ &= (x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz \end{aligned}$$

$$\text{Do } x + y + z : 6 \Rightarrow (x + y + z)(xy + yz + zx) : 6 \quad (1)$$

Mặt khác: $x + y + z \vdots 6$ nên trong 3 số x, y, z có ít nhất một số chẵn. Vì nếu cả ba số đều lẻ thì $x + y + z$ lẻ $\Rightarrow x + y + z \not\vdots 6$. Trái với giả thiết.

$$\Rightarrow 3xyz \vdots 6 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $(x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz \vdots 6$

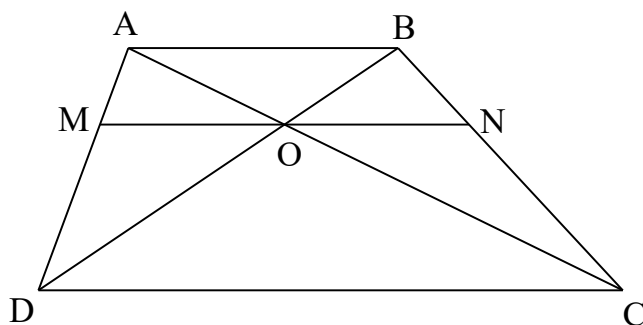
Vậy $M \vdots 6$

Câu 8. (4.0 điểm) Hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có hai đường chéo cắt nhau tại O. Đường thẳng qua O và song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự ở M, N.

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$

b) Biết $S_{AOB} = 2022^2$; $S_{COD} = 2023^2$. Tính S_{ABCD} .

Lời giải:



a) Từ giả thiết đường thẳng qua O và song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự ở M, N

Ta có: $\frac{OM}{AB} = \frac{OD}{BD}$; $\frac{ON}{AB} = \frac{OC}{AC}$; $\frac{OD}{DB} = \frac{OC}{AC}$ (Định lý Ta-lét)

$$\Rightarrow \frac{OM}{AB} = \frac{ON}{AB} \Rightarrow OM = ON$$

Xét $\triangle ABD$ có: $\frac{OM}{AB} = \frac{DM}{AD}$ (1) (Hệ quả định lý Ta-lét)

Xét $\triangle ADC$ có: $\frac{OM}{DC} = \frac{AM}{AD}$ (2) (Hệ quả định lý Ta-lét)

Từ (1), (2) $\Rightarrow OM \cdot \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} \right) = \frac{AM + DM}{AD} = \frac{AD}{AD} = 1$

Chứng minh tương tự: $ON \cdot \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} \right) = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$$

b) $\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \frac{OB}{OD}$; $\frac{S_{BOC}}{S_{DOC}} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow S_{AOB} \cdot S_{DOC} = S_{BOC} \cdot S_{AOD}$

Chứng minh được: $S_{AOD} = S_{BOC} \Rightarrow S_{AOB} \cdot S_{DOC} = (S_{AOD})^2$

Thay số ta được: $(S_{AOD})^2 = 2022^2 \cdot 2023^2 \Rightarrow S_{AOD} = 2022 \cdot 2023$

Do đó: $S_{ABCD} = 2022^2 + 2 \cdot 2022 \cdot 2023 + 2023^2 = (2022 + 2023)^2 = 4045^2$ (đvdt)

Câu 9. (2.0 điểm) Trên tờ giấy kẻ vô hạn các ô vuông và được tô bởi các màu đỏ hoặc xanh thỏa mãn: bất cứ hình chữ nhật nào có kích thước 2×3 thì có đúng hai ô màu đỏ. Hỏi hình chữ nhật có kích thước 2022×2023 có bao nhiêu ô màu đỏ.

Lời giải:

Ta chứng minh hình chữ nhật 1×3 có đúng một ô màu đỏ.

Giả sử hình chữ nhật có kích thước 1×3 có số ô màu đỏ

khác 1

$\Rightarrow$ Số ô màu đỏ của hình chữ nhật 1×3 là 0 hoặc 2.

Xét hình chữ nhật 1×3 ABCD (hình vẽ):

+) Nếu ABCD không có ô nào màu đỏ:

Do hình chữ nhật 2×3 ABFE có đúng 2 ô màu đỏ

$\Rightarrow$ hình chữ nhật 1×3 CDEF có đúng 2 ô màu đỏ

Do hình chữ nhật 2×3 CDHG có đúng 2 ô màu đỏ

$\Rightarrow$ hình chữ nhật 1×3 EFGH không có ô màu đỏ nào.

Khi đó hình chữ nhật 2×3 ANPH hoặc BMQG chỉ có một

ô màu đỏ $\Rightarrow$ Trái với giả thiết.

+) Nếu ABCD có 2 ô màu đỏ:

Do hình chữ nhật 2×3 ABFE có đúng 2 ô màu đỏ

$\Rightarrow$ hình chữ nhật 1×3 CDEF không có ô màu đỏ nào

Do hình chữ nhật 2×3 CDHG có đúng 2 ô màu đỏ

$\Rightarrow$ hình chữ nhật 1×3 EFGH có đúng 2 ô màu đỏ.

Khi đó hình vuông 3×3 ABGH có đúng 4 ô màu

đỏ.

Do hình chữ nhật 2×3 ANPH và BMQG đều có đúng 2 ô màu đỏ nên 4 ô màu đỏ của hình vuông 3×3 ABGH phải ở vị trí như hình vẽ.

Do hình chữ nhật 2×3 XYNP có đúng 2 ô màu đỏ

$\Rightarrow$ hình chữ nhật 1×3 BXYG không có ô màu đỏ

nào.

$\Rightarrow$ hình chữ nhật 2×3 MXUV chỉ có 1 ô màu đỏ $\Rightarrow$

Trái với giả thiết

Tóm lại: Hình chữ nhật 1×3 ABCD tùy ý chỉ có một ô màu đỏ.

Vậy hình chữ nhật có kích thước 2022×2023 có số ô màu đỏ là: $674 \cdot 2023 = 1363502$ (ô đỏ)

