

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI MÔN: TOÁN*Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)***Câu 1 (1,0 điểm).**

Tìm các số tự nhiên có dạng $\overline{ab}$, biết rằng $(\overline{ab})^2 - (\overline{ba})^2$ là số chia hết cho 3267.

Câu 2 (1,0 điểm).

Cho p là một số nguyên tố thỏa mãn $p = a^3 - b^3$ (với a, b là hai số nguyên dương phân biệt). Chứng minh rằng nếu lấy $4p$ chia cho 3 và loại bỏ phần dư thì nhận được một số là bình phương của một số nguyên lẻ.

Câu 3 (1,0 điểm).

Cho $x = \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$. Chứng minh rằng $x = \sqrt{5} + 1$.

Từ đó tính giá trị biểu thức $A = \frac{(x^2 - 2x)^2 - 4x^2 + 8x + 2018}{x^2 - 2x - 3}$

Câu 4 (1,0 điểm).

Cho biểu thức $B = \left(\frac{5}{\sqrt{x} - 1} + \frac{7}{2\sqrt{x} + 3} - \frac{11\sqrt{x} + 13}{2x + \sqrt{x} - 3} \right) : \frac{6\sqrt{x} - 5}{7x - 7\sqrt{x}}$, với $x > 0; x \neq \frac{25}{36}; x \neq 1$.

Rút gọn biểu thức B và tìm số thực x để biểu thức B nhận giá trị nguyên.

Câu 5 (1,0 điểm).

Giải phương trình $\frac{7x}{\sqrt{7x+16}} = \sqrt{7x+25} - 5$.

Câu 6 (1,0 điểm).

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}} + \sqrt{\frac{yz}{yz+x}} + \sqrt{\frac{zx}{zx+y}} \leq \frac{3}{2}.$$

Câu 7 (1,0 điểm).

Cho hình thoi $ABCD$ có góc A nhọn, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Kẻ OH vuông góc với đường thẳng AB tại H . Trên tia đối của tia BC lấy điểm M (điểm M không trùng với điểm B), trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho đường thẳng HM song song với đường thẳng AN . Chứng minh rằng $\triangle MOB \sim \triangle OND$.

Câu 8 (1,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AD và trực tâm H . Lấy điểm M trên đoạn AD sao cho $\widehat{BMC} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $S_{MBC} = \sqrt{S_{ABC} \cdot S_{HBC}}$.

Câu 9 (1,0 điểm).

Tính giá trị của biểu thức $C = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 89^\circ$.

Câu 10 (1,0 điểm).

Từ 625 số tự nhiên liên tiếp $1, 2, 3, \dots, 625$, chọn ra 311 số sao cho không có hai số nào có tổng bằng 625. Chứng minh rằng trong 311 số được chọn, bao giờ cũng có ít nhất một số chính phương.

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

PHÒNG GD&ĐT BÌNH XUYỀN KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 NĂM HỌC 2018-2019
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN
(Hướng dẫn chấm gồm 05 trang)

I) Hướng dẫn chung:

- 1) Hướng dẫn chấm chỉ nêu một cách giải với những ý cơ bản, nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong hướng dẫn chấm nhưng vẫn đúng thì cho đủ số điểm từng phần như thang điểm quy định.
- 2) Việc chi tiết hoá thang điểm (nếu có) trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện với tất cả giám khảo.
- 3) Điểm toàn bài tính đến **0,25** điểm. Sau khi cộng điểm toàn bài, **giữ nguyên kết quả**.
- 4) Với bài hình học nếu học sinh **không vẽ hình** phần nào thì **không** cho điểm phần đó.

II) Đáp án và thang điểm:

Câu 1 (1,0 điểm). Tìm các số tự nhiên có dạng $\overline{ab}$, biết rằng $(\overline{ab})^2 - (\overline{ba})^2$ là số chia hết cho 3267.

Nội dung trình bày	Điểm
$(\overline{ab})^2 - (\overline{ba})^2 = (10a + b)^2 - (10b + a)^2 = 99(a^2 - b^2)$	0,25
$(\overline{ab})^2 - (\overline{ba})^2$ chia hết cho $3267 = 33.99$ nên $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ chia hết cho 33	0,25
Từ $1 \leq a \leq 9, 1 \leq b \leq 9$ và $(a - b)(a + b) : 33$ suy ra $a = b$ hoặc $(a; b) = (7; 4)$ hoặc $(a; b) = (4; 7)$	0,25
Từ đó ta tìm được các số 11; 22; 33; 44; 47; 55; 66; 74; 77; 88; 99 thỏa mãn.	0,25

Câu 2 (1,0 điểm). Cho p là một số nguyên tố thỏa mãn $p = a^3 - b^3$ (với a, b là hai số nguyên dương phân biệt). Chứng minh rằng nếu lấy $4p$ chia cho 3 và loại bỏ phần dư thì nhận được một số là bình phương của một số nguyên lẻ.

Nội dung trình bày	Điểm
Ta có $p = a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ là số nguyên tố Mà a, b là các số nguyên dương phân biệt nên tích $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ là số nguyên tố khi và chỉ khi $a - b = 1$ và $a^2 + ab + b^2$ là số nguyên tố.	0,25
$\Rightarrow a = b + 1 \Rightarrow p = (b + 1)^3 - b^3 = 3b^2 + 3b + 1$	0,25
$\Rightarrow 4p = 12b^2 + 12b + 4 = 3(4b^2 + 4b + 1) + 1 \equiv 1 \pmod{3}$	0,25
Nếu lấy $4p$ chia 3 và loại bỏ phần dư ta được số $A = 4b^2 + 4b + 1 = (2b + 1)^2$ hiển nhiên là số chính phương (đpcm).	0,25

Câu 3 (1,0 điểm). Cho $x = \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$. Chứng minh rằng $x = \sqrt{5} + 1$.

Từ đó tính giá trị biểu thức $A = \frac{(x^2 - 2x)^2 - 4x^2 + 8x + 2018}{x^2 - 2x - 3}$

Nội dung trình bày	Điểm
$x = \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \Rightarrow x^2 = 8 + 2\sqrt{4^2 - (\sqrt{10 + 2\sqrt{5}})^2}$	0,25

$\Rightarrow x^2 = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 6 + 2\sqrt{5} \Rightarrow x = \sqrt{5} + 1$	0,25
$\Rightarrow x - 1 = \sqrt{5} \Rightarrow (x - 1)^2 = 5 \Rightarrow x^2 - 2x = 4$	0,25
Khi đó: $A = \frac{(x^2 - 2x)^2 - 4x^2 + 8x + 2018}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x) + 2018}{(x^2 - 2x) - 3}$	0,25
$A = \frac{4^2 - 4 \cdot 4 + 2018}{4 - 3} = 2018$	

Câu 4(1,0 điểm). Cho biểu thức $B = \left(\frac{5}{\sqrt{x} - 1} + \frac{7}{2\sqrt{x} + 3} - \frac{11\sqrt{x} + 13}{2x + \sqrt{x} - 3} \right) : \frac{6\sqrt{x} - 5}{7x - 7\sqrt{x}}$,

với $x > 0; x \neq \frac{25}{36}; x \neq 1$. Rút gọn biểu thức B và tìm số thực x để biểu thức B nhận giá trị nguyên.

Nội dung trình bày	Điểm
Với $x > 0; x \neq \frac{25}{36}; x \neq 1$ (1) thì $B = \frac{5(2\sqrt{x} + 3) + 7(\sqrt{x} - 1) - (11\sqrt{x} + 13)}{(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 3)} : \frac{6\sqrt{x} - 5}{7\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}$	0,25
$B = \frac{6\sqrt{x} - 5}{(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 3)} : \frac{6\sqrt{x} - 5}{7\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} = \frac{7\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 3}$	0,25
$B = \frac{7\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 3} = \frac{\frac{7}{2}(2\sqrt{x} + 3) - \frac{21}{2}}{2\sqrt{x} + 3} = \frac{7}{2} - \frac{21}{2(2\sqrt{x} + 3)} \quad (2)$	0,25
Từ (1) và (2) suy ra $0 < B < \frac{7}{2}$, mà $B \in \mathbb{Z}$ nên $B \in \{1; 2; 3\}$	0,25
$B = 1 \Rightarrow x = \frac{9}{25}$ (Thỏa mãn); $B = 2 \Rightarrow x = 4$ (Thỏa mãn); $B = 3 \Rightarrow x = 81$ (Thỏa mãn)	
Vậy: $x = \frac{9}{25}; x = 4; x = 81$	

Câu 5(1,0 điểm). Giải phương trình $\frac{7x}{\sqrt{7x+16}} = \sqrt{7x+25} - 5$

Nội dung trình bày	Điểm
Điều kiện xác định $x > \frac{-16}{7}$ (*)	0,25
Với điều kiện (*), phương trình đã cho tương đương với $\frac{7x}{\sqrt{7x+16}} = \frac{7x+25-25}{\sqrt{7x+25}+5}$	
$\Leftrightarrow 7x \left(\frac{1}{\sqrt{7x+16}} - \frac{1}{\sqrt{7x+25}+5} \right) = 0$	0,25
TH1: $7x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Thỏa mãn)	0,25
TH2: $\frac{1}{\sqrt{7x+16}} - \frac{1}{\sqrt{7x+25}+5} = 0$	0,25

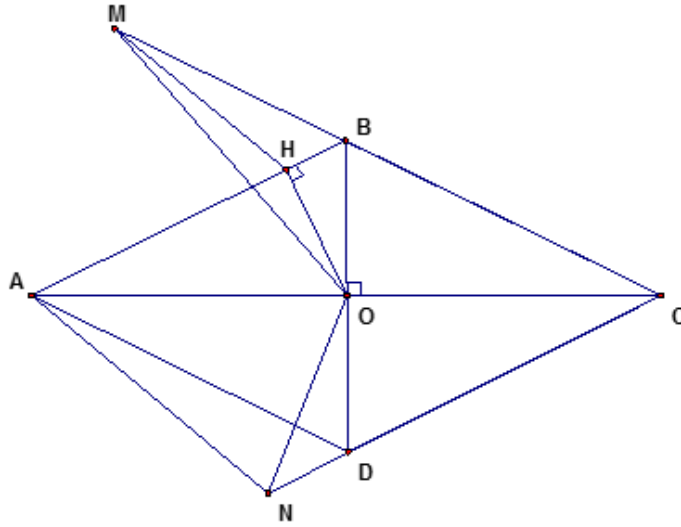
$\Leftrightarrow \sqrt{7x+16} = \sqrt{7x+25} + 5$	
$\Leftrightarrow -34 = 10\sqrt{7x+25}$ (Loại vì vế trái âm, vế phải dương)	
Vậy $x = 0$ là nghiệm của phương trình đã cho.	
Lưu ý: HS có thể đánh giá $\sqrt{7x+25} + 5 > \sqrt{7x+16}$ để suy ra không xảy ra TH2.	

Câu 6 (1,0 điểm). Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}} + \sqrt{\frac{yz}{yz+x}} + \sqrt{\frac{zx}{zx+y}} \leq \frac{3}{2}$$

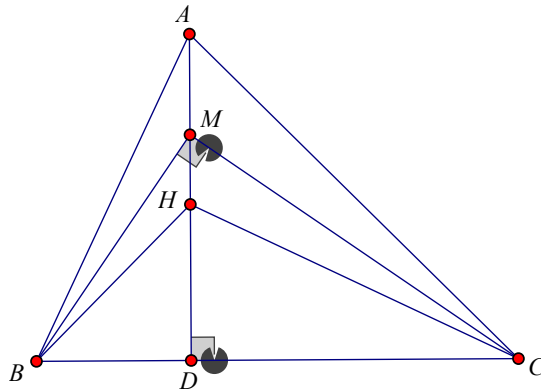
Nội dung trình bày	Điểm
Vì $x + y + z = 1$ nên ta có $xy + z = xy + z(x + y + z) = (x + z)(y + z)$ Do đó $\sqrt{\frac{xy}{xy+z}} = \sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}} = \sqrt{\frac{x}{x+z} \cdot \frac{y}{y+z}}$	0,25
Với các số dương a và b ta luôn có BĐT $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$, áp dụng BĐT này ta được: $\sqrt{\frac{xy}{xy+z}} = \sqrt{\frac{x}{x+z} \cdot \frac{y}{y+z}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z} \right) \quad (1)$	0,25
Lưu ý: + Không yêu cầu HS chứng minh BĐT $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$. + Thay vì dẫn ra BĐT cụ thể như trên, HS cũng có thể viết: “áp dụng BĐT AM-GM ta có” hoặc “áp dụng BĐT Cô-si ta có”	
Chứng minh tương tự, ta cũng có $\sqrt{\frac{yz}{yz+x}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{x+z} \right) (2); \quad \sqrt{\frac{zx}{zx+y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y+z} + \frac{x}{x+y} \right) (3)$	0,25
Từ (1), (2) và (3) ta suy ra $\sqrt{\frac{xy}{xy+z}} + \sqrt{\frac{yz}{yz+x}} + \sqrt{\frac{zx}{zx+y}} \leq \frac{3}{2}$	0,25
Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$ (Lưu ý: không yêu cầu HS nêu bước này)	

Câu 7 (1,0 điểm). Cho hình thoi $ABCD$ có góc A nhọn, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Kẻ OH vuông góc với đường thẳng AB tại H . Trên tia đối của tia BC lấy điểm M (điểm M không trùng với điểm B), trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho đường thẳng HM song song với đường thẳng AN . Chứng minh rằng $\triangle MOB \cong \triangle OND$.



Nội dung trình bày	Điểm
Ta có $\widehat{MBH} = \widehat{ADN}$; $\widehat{MHB} = \widehat{AND} \Rightarrow \Delta MBH \# \Delta ADN \Rightarrow MB.DN = BH.AD$ (1)	0,25
Ta có: $\Delta OHB \# \Delta AOD \Rightarrow \frac{BH}{DO} = \frac{OB}{AD} \Rightarrow DO.OB = BH.AD$ (2)	0,25
Từ (1) và (2) ta có: $MB.DN = DO.OB \Rightarrow \frac{MB}{DO} = \frac{OB}{DN}$ (3)	0,25
Ta lại có: $\widehat{MBO} = 180^\circ - \widehat{CBD} = 180^\circ - \widehat{CDB} = \widehat{ODN}$ (4) Từ (3) và (4) suy ra $\Delta MOB \# \Delta OND$ (đpcm).	0,25

Câu 8 (1,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AD và trực tâm H . Lấy điểm M trên đoạn AD sao cho $\widehat{BMC} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $S_{MBC} = \sqrt{S_{ABC} \cdot S_{HBC}}$.



Nội dung trình bày	Điểm
Ta có $S_{MBC} = \sqrt{S_{ABC} \cdot S_{HBC}} \Leftrightarrow (MD.BC)^2 = (AD.BC).(HD.BC) \Leftrightarrow MD^2 = AD.HD$ (1)	0,25
Lại có $MD^2 = BD.CD$ (2) (hệ thức lượng trong tam giác MBC vuông tại M , đường cao MD).	0,25
Mặt khác, vì $\widehat{DAB} = \widehat{DCH}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$) và $\widehat{ADB} = \widehat{CDH} = 90^\circ$ nên $\Delta ADB \# \Delta CDH$, do đó $AD.HD = BD.CD$ (3)	0,25
Từ (2) và (3) suy ra (1) đúng, do đó ta có đpcm.	0,25

Câu 9 (1,0 điểm). Tính giá trị của biểu thức $C = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 89^\circ$.

Nội dung trình bày	Điểm
Vì 1° và 89° là các góc phụ nhau nên $\sin^2 89^\circ = \cos^2 1^\circ$. Tương tự, ta cũng có $\sin^2 88^\circ = \cos^2 2^\circ$; $\sin^2 87^\circ = \cos^2 3^\circ$; ... ; $\sin^2 46^\circ = \cos^2 44^\circ$.	0,25
Do đó, $C = (\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) + \sin^2 45^\circ$	0,25
$C = (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) + \sin^2 45^\circ$	0,25
$C = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{44} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 44 + \frac{1}{2} = \frac{89}{2}$	0,25

Câu 10 (1,0 điểm). Từ 625 số tự nhiên liên tiếp $1, 2, 3, \dots, 625$, chọn ra 311 số sao cho không có hai số nào có tổng bằng 625. Chứng minh rằng trong 311 số được chọn, bao giờ cũng có ít nhất một số chính phương.

Nội dung trình bày	Điểm
Ta phân chia 625 số tự nhiên đã cho thành 311 nhóm như sau: + nhóm thứ nhất gồm năm số chính phương: $\{49; 225; 400; 576; 625\}$	0,25
+ 310 nhóm còn lại mỗi nhóm gồm hai số có tổng bằng 625 (không chứa các số của nhóm thứ nhất): $\{1; 624\}, \{2; 623\}, \{3; 622\}, \dots$	0,25
Nếu trong 311 số được chọn không có số nào thuộc nhóm thứ nhất thì 311 số này thuộc 310 nhóm còn lại.	0,25
Theo nguyên tắc Dirichlet phải có ít nhất hai số thuộc cùng một nhóm. Hai số này có tổng bằng 625 (không thỏa mãn). Vậy chắc chắn trong 311 số được chọn phải có ít nhất một số thuộc nhóm thứ nhất, theo cách chia nhóm như trên thì số này là số chính phương (đpcm).	0,25

Hết.