

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI MÔN: TOÁN - CHUYÊN

(Dành cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán và chuyên Tin học)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (2,0 điểm). Giải các phương trình sau:

a) $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6) = 160.$

b) $x^2 + 3x + 8 = 2(x+1)\sqrt{x+7}.$

Câu 2 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + \frac{x+2y}{xy} = 6 \\ x^2 + y^2 + \frac{x^2 + 4y^2}{(xy)^2} = 14 \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đẳng thức $(y+2)x^2 + 1 = y^2.$

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $3n+1, 11n+1$ là các số chính phương và $n+3$ là số nguyên tố.

Câu 4 (1,0 điểm).

a) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}.$$

b) Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca + abc \leq 4$. Chứng minh rằng $a + b + c \geq ab + bc + ca.$

Câu 5 (3,0 điểm).

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại điểm E . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại điểm N ($N \neq A$). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại các điểm B, C cắt nhau tại điểm D .

a) Chứng minh $AOND$ là tứ giác nội tiếp và tia DO là phân giác của góc $\widehat{ADN}$.

b) Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm P ($P \neq A$). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AME cắt đường tròn (O) tại điểm F ($F \neq A$). Chứng minh $AB \cdot PC = AC \cdot PB$ và ba điểm E, F, P thẳng hàng.

c) Kẻ đường kính AK của đường tròn (O) . Chứng minh ba điểm D, K, F thẳng hàng và đường thẳng FN đi qua trung điểm của đoạn thẳng DM .

Câu 6 (1,0 điểm).

Sau khi tổ chức một trận đấu giao hữu giữa hai đội bóng lớp 9A và 9B, Ban tổ chức có 11 gói kẹo muốn chia cho 2 đội. Mỗi đội được chia 5 gói làm phần thưởng và 1 gói Ban tổ chức giữ lại để liên hoan. Biết rằng dù chọn bất kỳ gói nào để giữ lại, Ban tổ chức luôn có thể chia 10 gói còn lại cho 2 đội mà tổng số viên kẹo trong 5 gói cho mỗi đội là bằng nhau. Chứng minh rằng 11 gói kẹo đó phải có số viên kẹo bằng nhau.