

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $4x^2 + 5y^2 - 4xy + 2(2x + 3y) + 4 \leq 0$.

b) Cho a, b, c là các số thực khác không thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ca} + \frac{1}{c^2 + 2ab} = 0$.

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+2)(2-y) = 8 \\ \sqrt{11-4(x-y)} + x^2y^2 + 1 = 3xy. \end{cases}$

b) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 3x + 11} - \sqrt{x + 2} = 2x - 2$.

Câu 3. (1,5 điểm)

a) Tìm tất cả các số thực x để $p = \frac{5}{x - \sqrt{x+2}}$ là số nguyên.

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 thì $A = n^{2024} + n^{2023} + n^4 - n + 1$ không phải là số nguyên tố.

Câu 4. (2,5 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định, C là một điểm chạy trên đường tròn (O) không trùng với A và B . Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và C cắt nhau tại điểm M . Đường thẳng MB cắt AC tại F và cắt đường tròn (O) tại E (E khác B).

a) Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AC . Chứng minh tam giác OEM đồng dạng với tam giác BHM .

b) Gọi K là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB . Hai đường thẳng MB và CK cắt nhau tại I . Tính tỷ số $\frac{FI}{AB}$ khi tổng diện tích hai tam giác IAC và IBC lớn nhất.

c) Chứng minh rằng $\frac{1}{BM} + \frac{1}{BF} = \frac{2}{BE}$.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a > b > c$; $ab + bc + ca > 0$ và $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-c} + \frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$.

Câu 6. (0,5 điểm) Cho x, y, z là các số chính phương. Chứng minh rằng $(x+1)(y+1)(z+1)$ luôn viết được dưới dạng tổng của hai số chính phương.

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

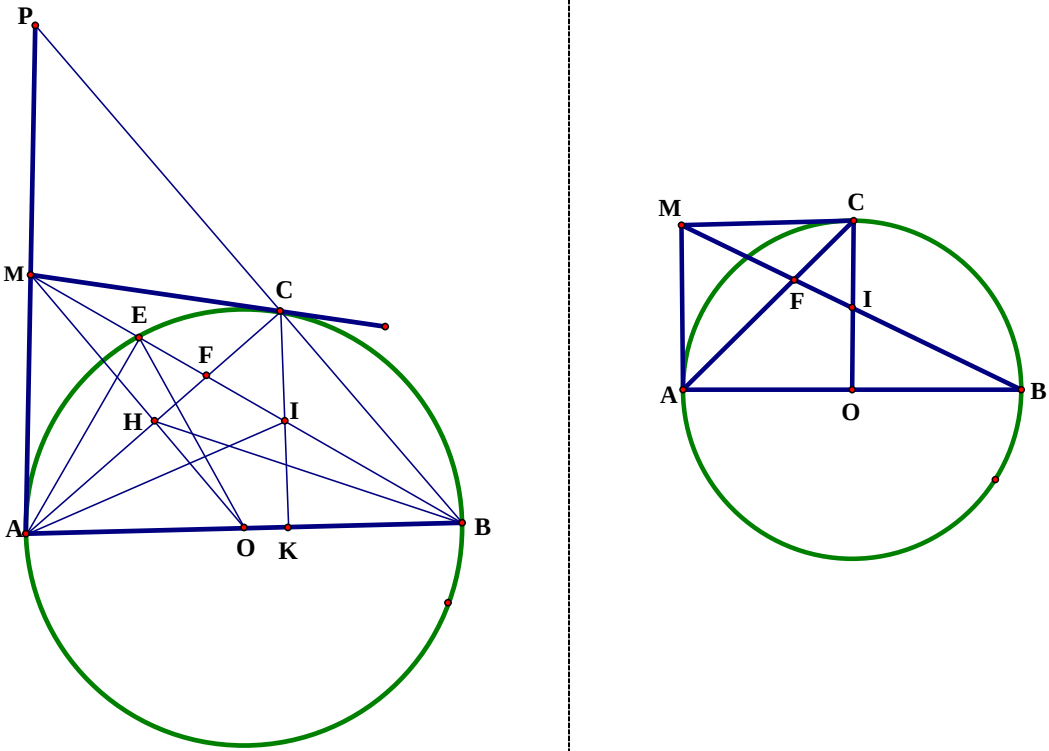
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

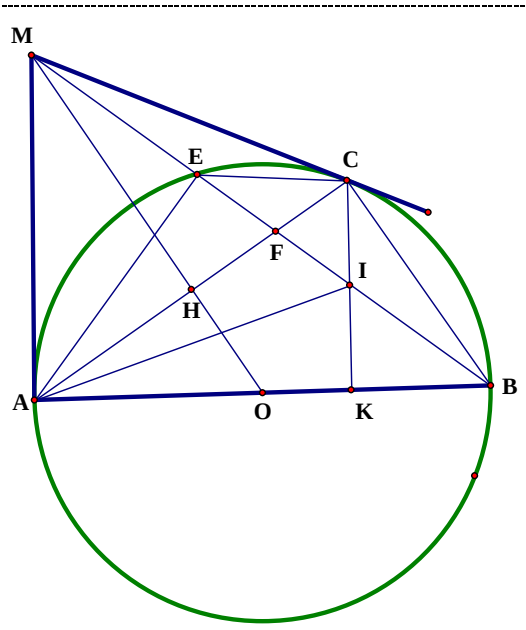
Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:

Chú ý: - Thí sinh giải theo cách khác, nếu đúng đều cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài không qui tròn.

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1a 1,0 đ	Ta có $4x^2 + 5y^2 - 4xy + 2(2x + 3y) + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (2x - y + 1)^2 + 4(y + 1)^2 \leq 1$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x - y + 1)^2 + 4(y + 1)^2 = 1 \\ (2x - y + 1)^2 + 4(y + 1)^2 = 0 \end{cases}$	0,25
	TH1: $(2x - y + 1)^2 + 4(y + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$	0,25
	TH2: $(2x - y + 1)^2 + 4(y + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 4(y + 1)^2 = 1 \end{cases} \text{ (vn)}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (2x - y + 1)^2 = 1 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x + 2)^2 = 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ (vn)}.$ Vậy có đúng một cặp số thỏa mãn $(x; y) = (-1; -1)$.	0,25
Câu 1b 1,0 đ	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca = 0$	0,25
	Ta có : $a^2 + 2bc = a^2 + bc + (-ab - ca) = (a - b)(a - c)$. Tương tự có : $b^2 + 2ca = (b - c)(b - a)$; $c^2 + 2ab = (c - a)(c - b)$.	0,5
	$\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ca} + \frac{1}{c^2 + 2ab} = \frac{1}{(a - b)(a - c)} + \frac{1}{(b - c)(b - a)} + \frac{1}{(c - a)(c - b)}$ $= \frac{1}{(a - b)(a - c)} - \frac{1}{(b - c)(a - b)} + \frac{1}{(a - c)(b - c)} = \frac{b - c - (a - c) + a - b}{(a - b)(b - c)(a - c)} = 0$	0,25
Câu 2a 1,5 đ	ĐK: $11 - 4(x - y) \geq 0$ $(x + 2)(2 - y) = 8 \Leftrightarrow 2(x - y) - xy = 4 \Rightarrow 2(x - y) = 4 + xy$	0,25
	Thế vào phương trình (2) ta có: $\sqrt{11 - 2(4 + xy)} + x^2y^2 - 3xy + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3 - 2xy} + x^2y^2 - 3xy + 1 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (\sqrt{3 - 2xy} - 1) + x^2y^2 - 3xy + 2 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{2(1 - xy)}{\sqrt{3 - 2xy} + 1} + (1 - xy)(2 - xy) = 0 \Leftrightarrow (1 - xy) \left(\frac{2}{\sqrt{3 - 2xy} + 1} + 2 - xy \right) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow xy = 1$ (Do $\frac{2}{\sqrt{3 - 2xy} + 1} + 2 - xy > 0, \forall xy \leq \frac{3}{2}$)	0,25

	Ta có: $\begin{cases} xy=1 \\ 2(x-y)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ 2\left(x-\frac{1}{x}\right)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ 2x^2-5x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ x=\frac{5\pm\sqrt{41}}{4} \end{cases}$ Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x; y) = \left(\frac{5+\sqrt{41}}{4}; \frac{-5+\sqrt{41}}{4}\right)$ và $\left(\frac{5-\sqrt{41}}{4}; \frac{-5-\sqrt{41}}{4}\right)$	0,25
Câu 2b 1,0 đ	ĐK: $\begin{cases} x^2+3x+11 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -2$ $\sqrt{x^2+3x+11} - \sqrt{x+2} = 2x-2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+5(x+2)} - \sqrt{x+2} = 2(x-1)$	0,25
	Xét $x = -2$ (không phải là nghiệm) Xét $x > -2$ Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{x+2}$ ta được: $\sqrt{\frac{(x-1)^2}{x+2}+5} - 1 = \frac{2(x-1)}{\sqrt{x+2}}$. Đặt $t = \frac{x-1}{\sqrt{x+2}}$ ta được phương trình: $\sqrt{t^2+5} - 1 = 2t$	0,25
	$\Leftrightarrow \sqrt{t^2+5} = 2t+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t+1 \geq 0 \\ t^2+5 = (2t+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\frac{1}{2} \\ 3t^2+4t-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\frac{1}{2} \\ t=-2; t=\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$	0,25
	Khi $t = \frac{2}{3}$ ta được phương trình: $\frac{x-1}{\sqrt{x+2}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} = 3(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 4(x+2) = 9(x-1)^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 9x^2-22x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = \frac{11 \pm 4\sqrt{7}}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{11+4\sqrt{7}}{9}$. Vậy phương trình có đúng 1 nghiệm $x = \frac{11+4\sqrt{7}}{9}$ Chú ý: Học sinh có thể giải theo cách: Đặt $\begin{cases} a = x-1 \\ b = \sqrt{x+2} \geq 0. \end{cases}$	0,25
Câu 3a 1,0 đ	Ta có $p = \frac{5}{x-\sqrt{x+2}} = \frac{5}{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}$	0,25
	$\Rightarrow 0 < p \leq \frac{5}{\frac{7}{4}} = \frac{20}{7} \Rightarrow p = 1; 2$	0,25
	TH1: $p = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{x-\sqrt{x+2}} = 1 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$.	0,25

	TH2: $p = 2 \Leftrightarrow \frac{5}{x - \sqrt{x} + 2} = 2 \Leftrightarrow 2x - 2\sqrt{x} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$. Vậy có hai giá trị cần tìm là $x = \frac{7 + \sqrt{13}}{2}; \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$.	0,25
Câu 3b 0,5 đ	Ta có $A = n^{2024} + n^{2023} + n^4 - n + 1 = (n^{2024} - n^2) + (n^{2023} - n) + (n^4 + n^2 + 1)$ $= n^2(n^{2022} - 1) + n(n^{2022} - 1) + (n^4 + n^2 + 1) = (n^2 + n)(n^{2022} - 1) + (n^4 + n^2 + 1)$ Ta có $(n^2 + n)(n^{2022} - 1) = (n^2 + n)[(n^3)^{674} - 1]$ $= (n^2 + n)(n^3 - 1).B = (n^2 + n)(n - 1)(n^2 + n + 1).B$ chia hết cho $n^2 + n + 1$	0,25
	Lại có $n^4 + n^2 + 1 = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2 + 1)^2 - n^2$ $= (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$ chia hết cho $n^2 + n + 1$ Vậy $A = n^{2024} + n^{2023} + n^4 - n + 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$ với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 nên A không phải là số nguyên tố.	0,25
Câu 4a 1,0 đ		
	a) Ta có $ME.MB = MA^2$ do $\triangle MAB$ vuông tại A có đường cao AE.	0,25
	Lại có $MH.MO = MA^2$ do $\triangle MAO$ vuông tại A có đường cao AH.	0,25
	$\Rightarrow ME.MB = MH.MO$	0,25
	$\Rightarrow \frac{ME}{MH} = \frac{MO}{MB} \Rightarrow \triangle OME \sim \triangle BMH$	0,25
Câu 4b 0,75 đ	b) Ta có $MA = MC, OA = OC$ suy ra đường thẳng MO là trung trực đoạn thẳng AC nên $MO \perp AC$. Kéo dài BC cắt AM tại P nên $MO \parallel PB \Rightarrow M$ trung điểm AP. Ta có $\frac{IC}{MP} = \frac{BI}{BM}$ và $\frac{IK}{MA} = \frac{BI}{BM} \Rightarrow \frac{IC}{MP} = \frac{IK}{MA} \Rightarrow IC = IK$ Suy ra I trung điểm của đoạn thẳng CK.	0,25

	$\Rightarrow S_{\Delta ACI} = \frac{1}{2} S_{\Delta ACK}; S_{\Delta BCI} = \frac{1}{2} S_{\Delta BCK} \Rightarrow S_{\Delta AIC} + S_{\Delta BCI} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4} CK \cdot AB$ Do đoạn thẳng AB không đổi nên tổng diện tích hai tam giác IAC và IBC lớn nhất. lớn nhất khi C điểm chính giữa AB hay K trùng tâm O.	0,25	
	Khi đó tứ giác $AOCM$ là hình vuông. $\Rightarrow \frac{FI}{FM} = \frac{IC}{AM} = \frac{1}{2} \Rightarrow FI = \frac{1}{3} IM = \frac{1}{6} BM. \text{ Lại có } BM^2 = AB^2 + MA^2 = \frac{5AB^2}{4}$ $\Rightarrow BM = \frac{AB\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{FI}{AB} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{AB\sqrt{5}}{2}}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{12}.$	0,25	
Câu 4c 0,75 đ		c) Ta có $\Delta MEC \sim \Delta MCB \Rightarrow \frac{ME}{MC} = \frac{CE}{CB}$ $\Delta MEA \sim \Delta MAB \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{EA}{AB}$ $\Rightarrow \frac{ME}{MC} \cdot \frac{MA}{MB} = \frac{CE}{CB} \cdot \frac{EA}{AB} \Rightarrow \frac{ME}{MB} = \frac{CE}{CB} \cdot \frac{AE}{AB} \quad (1).$	0,25
		Mặt khác $\Delta FEC \sim \Delta FAB \Rightarrow \frac{FE}{FA} = \frac{CE}{AB}$ $\Delta FAE \sim \Delta FBC \Rightarrow \frac{FA}{FB} = \frac{AE}{BC}$ $\Rightarrow \frac{FE}{FA} \cdot \frac{FA}{FB} = \frac{CE}{AB} \cdot \frac{EA}{CB} \Rightarrow \frac{FE}{FB} = \frac{CE}{CB} \cdot \frac{AE}{AB} \quad (2).$ Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{ME}{MB} = \frac{FE}{FB}$	0,25
		$\Rightarrow \frac{MB - EB}{MB} = \frac{EB - FB}{FB} \Rightarrow 1 - \frac{EB}{MB} = \frac{EB}{FB} - 1 \Rightarrow 2 = \frac{EB}{MB} + \frac{EB}{FB}$ $\Rightarrow 2 = EB \left(\frac{1}{MB} + \frac{1}{FB} \right) \Rightarrow \frac{1}{BM} + \frac{1}{BF} = \frac{2}{BE} \quad (\text{ĐPCM}).$	0,25
Câu 5 1,0 đ	Ta sử dụng các bất đẳng thức $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \geq \frac{4}{m+n} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2}}$ với $m > 0; n > 0$ Dấu bằng xảy ra khi $m = n$ $P = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-c} + \frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$ $P \geq \frac{4}{a-c} + \frac{1}{a-c} + \frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}} = \frac{5}{a-c} + \frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$	0,25	
	Lại có: $\frac{5}{a-c} + \frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}} \geq 5 \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(a-c)^2 + 4(ab+bc+ca)}} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)^2 + 4b(a+c)}}$	0,25	

	$\Rightarrow P \geq \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)(a+c+4b)}} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}} \quad (\text{do } a+c=1-b)$	
	$\Rightarrow P \geq \frac{10\sqrt{6}}{\sqrt{(3-3b)(1+3b)}} \geq \frac{10\sqrt{6}}{\frac{3-3b+1+3b}{2}} = 5\sqrt{6}$	0,25
	Giá trị nhỏ nhất của P bằng $5\sqrt{6}$ khi $\begin{cases} a > b > c \\ a+b+c=1 \\ a-b=b-c \\ a-c=2\sqrt{b(a+c)+ca} \\ 3-3b=1+3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > b > c \\ b = \frac{1}{3} \\ a+c = \frac{2}{3} \\ a-c = 2\sqrt{\frac{2}{9}+ca} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2+\sqrt{6}}{6} \\ b = \frac{1}{3} \\ c = \frac{2-\sqrt{6}}{6} \end{cases}$	0,25
Câu 6 0,5 đ	Vì $x; y; z$ là các số chính phương ta viết thành $x=a^2; y=b^2; z=c^2 (a; b; c \in \mathbb{Z})$ Ta có: $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) = (a^2b^2+a^2+b^2+1)(c^2+1) = [(a+b)^2+(ab-1)^2](c^2+1)$ $= [(ac+bc)^2+(ab-1)^2] + [(a+b)^2+(abc-c)^2]$	0,25
	Áp dụng các đẳng thức $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ và $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$ có: Thứ 1: $(ac+bc)^2+(ab-1)^2 = (ab+bc+ca-1)^2 - 2(ac+bc)(ab-1)$ $= (ab+bc+ca-1)^2 - 2(a^2bc+b^2ac-ac-bc)$ Thứ 2: $(a+b)^2+(abc-c)^2 = (a+b+c-abc)^2 + 2(a+b)(abc-c)$ $= (a+b+c-abc)^2 + 2(a^2bc+b^2ac-ac-bc)$ $\Rightarrow (ac+bc)^2+(ab-1)^2+(a+b)^2+(abc-c)^2 = (ab+bc+ca-1)^2 + (a+b+c-abc)^2$ Vậy $(x+1)(y+1)(z+1)$ là tổng của hai số chính phương.	0,25

HẾT.