

Câu 1: (4điểm)

a) Cho biểu thức $P = \left[\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^3} - 2\sqrt{2b^3}} - \frac{\sqrt{a}}{a + \sqrt{2ab} + 2b} \right] \left[\frac{\sqrt{a^3} + 2\sqrt{2b^3}}{2b + \sqrt{2ab}} - \sqrt{a} \right]$

Tìm điều kiện của a và b để biểu thức P xác định và rút gọn P.

b) Biết: $a = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $b = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$. Tính giá trị của biểu thức P.

Câu 2: (4điểm)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-1)\sqrt{14-y} + \sqrt{(y-2)(11+2x-x^2)} = 12 \\ x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = 2\sqrt{y-4} \end{cases}$$

b) x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình: $2x^2 - (3a-1)x - 2 = 0$, Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{3}{2}(x_1 - x_2)^2 + 2\left(\frac{x_1 - x_2}{2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)^2$

Câu 3: (4điểm)

a) Tìm các số nguyên dương x, y, z với $z \leq 6$ thỏa mãn phương trình sau:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 7z - 2 = 0$$

b) Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số nguyên. Chứng minh $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số chính phương.

Câu 4: (6điểm)

Cho đường tròn (O, R), và dây cung BC cố định ($BC < 2R$). Điểm A di động trên (O;R) sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn, AD là đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC.

a) Đường thẳng chứa tia phân giác ngoài của góc BHC cắt AB, AC lần lượt tại các điểm M, N. Chứng minh $\triangle AMN$ là tam giác cân

b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D trên các đường thẳng BH, CH. Chứng minh: $OA \perp EF$.

c) Đường tròn ngoại tiếp $\triangle AMN$ cắt đường phân giác trong của góc BAC tại K. Chứng minh đường thẳng HK luôn đi qua điểm cố định.

Câu 5: (2 điểm)

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn: $abc = 1$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{\sqrt{a^5 + b^2 + ab + 6}} + \frac{1}{\sqrt{b^5 + c^2 + bc + 6}} + \frac{1}{\sqrt{c^5 + a^2 + ca + 6}} \leq 1.$$

Họ và tên:

SBD:

HƯỚNG DẪN CHẤM
MÔN: TOÁN

CÂU	NỘI DUNG TRÌNH BÀY	ĐIỂM
Câu 1: 4 điểm	a- (2 điểm): $P = \left[\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^3} - 2\sqrt{2b^3}} - \frac{\sqrt{a}}{a + \sqrt{2ab} + 2b} \right] \left[\frac{\sqrt{a^3} + 2\sqrt{2b^3}}{2b + \sqrt{2ab}} - \sqrt{a} \right]$	
	Điều kiện để biểu thức P xác định là: $\begin{cases} a^3 \geq 0 \\ 2b^3 \geq 0 \\ \sqrt{a^3} - 2\sqrt{2b^3} \neq 0 \\ a + \sqrt{2ab} + 2b \neq 0 \\ 2b + \sqrt{2ab} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b > 0 \\ a \neq 2b \end{cases}$	0,5
	$P = \left[\frac{2(a+b) - \sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{2b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{2b})(a + \sqrt{2ab} + 2b)} \right] \left[\frac{(a + \sqrt{2b})(a - \sqrt{2ab} + 2b)}{\sqrt{2b}(\sqrt{2b} + \sqrt{a})} - \sqrt{a} \right]$	0,5
	$P = \frac{a + \sqrt{2ab} + 2b}{(\sqrt{a} - \sqrt{2b})(a + \sqrt{2ab} + 2b)} \cdot \frac{a - \sqrt{2ab} + 2b - \sqrt{2ab}}{\sqrt{2b}}$	0,5
	$P = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{2b}} \cdot \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{2b})^2}{\sqrt{2b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{2b}}{\sqrt{2b}}$	0,5
	b- (2 điểm): Ta có: $ab = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{8} \Rightarrow 2b = \frac{1}{4a}$ Do đó: $P = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{2b}}{\sqrt{2b}} = \sqrt{\frac{a}{2b}} - 1 = \sqrt{4a^2} - 1 = 2a - 1 = 1 + \sqrt{3}$	1,0 1,0
Câu 2 4 điểm	2b) (2,0 điểm) Giải hệ: $\begin{cases} (x-1)\sqrt{14-y} + \sqrt{(y-2)(11+2x-x^2)} = 12 \\ x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = 2\sqrt{y-4} \end{cases}$	0,5
	$(x-1)\sqrt{14-y} \leq \frac{(x-1)^2 + 14 - y}{2} \quad (1)$ Theo Cô si ta có $\sqrt{(y-2)(11+2x-x^2)} \leq \frac{y-2+11+2x-x^2}{2} \quad (2)$	0,5
	Từ (1) và (2) ta có: $(x-1)\sqrt{14-y} + \sqrt{(y-2)(11+2x-x^2)} \leq 12$	0,5
	Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ y-2 = 11+2x-x^2 \end{cases}$	
	Thay vào phương trình thứ 2 của hệ ta được: $x^3 - 3x^2 - 5x + 4 + 2(1 - \sqrt{9+2x-x^2}) = 0$ $\Leftrightarrow (x-4) \left(x^2 + x - 1 + \frac{2(x+2)}{1 + \sqrt{9+2x-x^2}} \right) = 0$	0,5
	Do $x \geq 1 \Rightarrow \left(x^2 + x - 1 + \frac{2(x+2)}{1 + \sqrt{9+2x-x^2}} \right) > 0$	

	Buộc $x=4$ từ đó tìm được $y=5$ (T/M) Vậy $(x;y)=(4;5)$ b- (2 điểm): $2x^2 - (3a-1)x - 2 = 0$ (1) phương trình (1) có: $\Delta = [-(3a-1)]^2 + 16 > 0$. phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2. Theo định lí Viets ta có: $P = \frac{3}{2}(x_1 - x_2)^2 + 2 \left[\frac{x_1 x_2 (x_1 - x_2) - 2(x_1 - x_2)}{2x_1 x_2} \right]^2 = 6(x_1 - x_2)^2$ $= 6[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] = 6 \left[\frac{(3a-1)^2}{4} + 4 \right] \geq 24$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $3a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$ Vậy Min $P = 24 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$	0,5 0,5 0,5
Câu 3 4điểm	a- (2 điểm): Biến đổi phương trình thành: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 7(z+1)$ (*) Nhận thấy một số chính phương chia cho 7 có số dư là 0; 1; 2; 4 nên tổng 2 số chính phương chia hết cho 7 thì cả 2 số chính phương đó chia hết cho 7 Từ (*) suy ra: $(x-2) : 7$ và $(y-1) : 7$ Do đó $(z+1) : 7$ mà $1 \leq z \leq 6$ nên $z = 6$. Ta có: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 49; 49 = 0^2 + 7^2$ Từ đó tìm được: $(x; y) = (2; 8), (9; 1)$ Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương là: $(x;y;z) \in \{(2;8;6), (9;1;6)\}$ b- (2 điểm): Hiển nhiên $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số nguyên mà $12n^2 + 1$ là số lẻ nên tồn tại số tự nhiên k mà $12n^2 + 1 = (2k + 1)^2$ $\Leftrightarrow 12n^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 1 \Leftrightarrow k(k+1) = 3n^2$. Vì $(k; k+1) = 1$ nên xảy ra hai trường hợp Trường hợp 1: $\begin{cases} k = a^2 \\ k+1 = 3b^2 \end{cases} (a, b \in \mathbb{N}) \Rightarrow a^2 - 3b^2 = -1 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow a^2 \equiv 2 \pmod{3} \text{ (vô lý)}$ Trường hợp 2: $\begin{cases} k = 3a^2 \\ k+1 = b^2 \end{cases} \Rightarrow b^2(b^2 - 1) = 3n^2 \Rightarrow 2 + 2\sqrt{12n^2 + 1} = 2 + 2\sqrt{4b^4 - 4b^2 + 1}$ $= 2 + 2(2b^2 - 1) = 4b^2$ Nên $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số chính phương	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5

	Ta có $\frac{TH}{TB} = \frac{MC'}{MB}$ (vì KM // CC') , $\frac{MC'}{MB} = \frac{HC'}{HB}$ (Vì HM là phân giác góc BHC') suy ra $\frac{TH}{TB} = \frac{HC'}{HB}$ Tương tự $\frac{SH}{SC} = \frac{HB'}{HC}$. Tứ giác BC'B'C nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{C'BH} = \widehat{B'CH} \Rightarrow \frac{TH}{TB} = \frac{SH}{SC} \Rightarrow TS // BC$ (8) Từ (7), (8) suy ra HK đi qua trung điểm của BC.	0,5 0,5
Câu 5 2điểm	Câu 5: (2,0 điểm) Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn: $abc = 1$. Chứng minh bất đẳng thức : $\frac{1}{\sqrt{a^5 + b^2 + ab + 6}} + \frac{1}{\sqrt{b^5 + c^2 + bc + 6}} + \frac{1}{\sqrt{c^5 + a^2 + ca + 6}} \leq 1.$ Ta có: $a^5 = a(a^4 + 1 + 1 + 1) - 3a \geq a \cdot 4a - 3a = 4a^2 - 3a$ dấu bằng $\Leftrightarrow a = 1$ (Vì $(a^4 + 1 + 1 + 1) \geq 4a$ bất đẳng thức cô si dấu bằng $\Leftrightarrow a = 1$) $\Rightarrow a^5 \geq 4a^2 - 3a = 3a^2 - 3a + a^2 \geq 3(2a - 1) - 3a + a^2 = a^2 + 3a - 3$ (do: $a^2 \geq 2a - 1$ dấu bằng $\Leftrightarrow a = 1$) $\Rightarrow a^5 + b^2 + ab + 6 \geq a^2 + 3a - 3 + b^2 + ab + 6 = a^2 + b^2 + 3a + 3 + ab \geq 3(ab + a + 1) \geq (\sqrt{ab} + \sqrt{a} + 1)^2$ (do $a^2 + b^2 \geq 2ab$ và do BĐT BunhiaCopSky; dấu bằng $\Leftrightarrow a = b = 1$). $\Rightarrow \sqrt{a^5 + b^2 + ab + 6} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{a} + 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a^5 + b^2 + ab + 6}} \leq \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{a} + 1}$ Chứng minh tương tự ta có: $\frac{1}{\sqrt{b^5 + c^2 + bc + 6}} \leq \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{b} + 1} = \frac{\sqrt{a}}{1 + \sqrt{ab} + \sqrt{a}}$ (do $abc = 1$; dấu bằng khi $b = c = 1$). Và ta có: $\frac{1}{\sqrt{c^5 + a^2 + ca + 6}} \leq \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{c} + 1} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + 1 + \sqrt{ab}}$ do $abc = 1$; dấu bằng khi $c = a = 1$. $\Rightarrow P \leq 1$, dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.	0,5 0,5 0,5 0,5