

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1 (4,0 điểm).

Cho biểu thức: $P = \frac{2x^5 - x^4 - 2x + 1}{4x^2 - 1} + \frac{8x^2 - 4x + 2}{8x^3 + 1}$

- Rút gọn P
- Tìm các giá trị của x để $P = 6$

Bài 2 (4,0 điểm).

- Cho các số a, b, c, d nguyên dương đôi một khác nhau và thoả mãn:

$$\frac{2a+b}{a+b} + \frac{2b+c}{b+c} + \frac{2c+d}{c+d} + \frac{2d+a}{d+a} = 6. \text{ Chứng minh } A = abcd \text{ là số chính phương.}$$

- Tìm a nguyên để $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ chia hết cho $a^2 + 3$.

Bài 3 (3,0 điểm).

- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (x - 1)(2x - 1)(2x^2 - 3x - 1) + 2017$

- Giải phương trình: $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 + \frac{x+1}{x-4} - 3\left(\frac{2x-4}{x-4}\right)^2 = 0$

Bài 4 (3,0 điểm).

- Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác thoả mãn: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Chứng minh tam giác đều.

- Cho x, y, z dương và $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{x^2 + 2yz} + \frac{1}{y^2 + 2xz} + \frac{1}{z^2 + 2xy} \geq 9$

Bài 5 (5,0 điểm).

Cho O là trung điểm của đoạn AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là cạnh AB vẽ tia Ax, By cùng vuông góc AB. Trên tia Ax lấy điểm C (khác A), qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By tại D.

- Chứng minh $AB^2 = 4 AC \cdot BD$
- Kẻ OM vuông góc CD tại M. Chứng minh $AC = CM$
- Từ M kẻ MH vuông góc AB tại H. Chứng minh BC đi qua trung điểm MH
- Tìm vị trí của C trên tia Ax để diện tích tứ giác ABDC nhỏ nhất.

Bài 6 (1,0 điểm). Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{2016}{x+y} + \frac{x}{y+2015} + \frac{y}{4031} + \frac{2015}{x+2016} = 2$$

-----HẾT-----

Họ và tên học sinh:Số báo danh:

HƯỚNG DẪN CHẤM TOÁN 8– NĂM HỌC 2015-2016

Bài	Nội dung	Biểu điểm
1	Cho biểu thức: $P = \frac{2x^5 - x^4 - 2x + 1}{4x^2 - 1} + \frac{8x^2 - 4x + 2}{8x^3 + 1}$ a. Rút gọn P b. Tìm các giá trị của x để P = 6	
	a) $P = \frac{2x^5 - x^4 - 2x + 1}{4x^2 - 1} + \frac{8x^2 - 4x + 2}{8x^3 + 1}$ $= \frac{x^4(2x-1) - (2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} + \frac{2(4x^2 - 2x + 1)}{(2x+1)(4x^2 - 2x + 1)}$ $= \frac{(x^4-1)(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} + \frac{2}{2x+1} = \frac{x^4-1}{2x+1} + \frac{2}{2x+1} = \frac{x^4+1}{2x+1}$ Vậy $P = \frac{x^4+1}{2x+1}$	0.25 1 1 0.25
	b) ĐK: $x \neq \pm \frac{1}{2}$ $P = 6 \Leftrightarrow \frac{x^4+1}{2x+1} = 6 \Leftrightarrow x^4 + 1 = 12x + 6$ $\Leftrightarrow x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^2 + 12x + 9$ $\Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 = (2x + 3)^2$ $\Leftrightarrow x^2 + 2 = 2x + 3 \quad (1) \text{ hoặc } x^2 + 2 = -2x - 3 \quad (2)$ Ta có (1) $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{2} \\ x-1 = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \quad (\text{tmđk})$ (2) $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = -4 \Leftrightarrow (x+1)^2 = -4$ vô nghiệm Vậy $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25
	a. Cho các số a, b, c, d nguyên dương đôi một khác nhau và thỏa mãn: $\frac{2a+b}{a+b} + \frac{2b+c}{b+c} + \frac{2c+d}{c+d} + \frac{2d+a}{d+a} = 6.$ Chứng minh A = abcd là số chính phương. b. Tìm a nguyên để $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ chia hết cho $a^2 + 3$.	
	a) $\frac{2a+b}{a+b} + \frac{2b+c}{b+c} + \frac{2c+d}{c+d} + \frac{2d+a}{d+a} = 6$ $\Leftrightarrow 1 + \frac{a}{a+b} + 1 + \frac{b}{b+c} + 1 + \frac{c}{c+d} + 1 + \frac{d}{d+a} = 6$ $\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a} = 2$ $\Leftrightarrow 1 - \frac{a}{a+b} - \frac{b}{b+c} + 1 - \frac{c}{c+d} - \frac{d}{d+a} = 0$	0,25 0,25

	$\Leftrightarrow \frac{b}{a+b} - \frac{b}{b+c} + \frac{d}{c+d} - \frac{d}{d+a} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{b(c-a)}{(a+b)(b+c)} + \frac{d(a-c)}{(c+d)(d+a)} = 0$ $\Leftrightarrow b(c+d)(d+a) - d(a+b)(b+c) = 0 \Leftrightarrow abc - acd + bd^2 - b^2d = 0$ $\Leftrightarrow (b-d)(ac-bd) = 0$ $\Leftrightarrow ac - bd = 0 \Leftrightarrow ac = bd \text{ (vì } b \neq d)$ Vậy $A = abcd = (ac)^2$ là số chính phương	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
	+) Thực hiện phép chia $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ cho $a^2 + 3$, kết quả : $a^3 - 2a^2 + 7a - 7 = (a^2 + 3)(a - 2) + (4a - 1)$ +) Lập luận để phép chia hết thì $4a - 1$ phải chia hết cho $a^2 + 3$ $(4a - 1) : (a^2 + 3)$ $\Rightarrow (4a - 1)(4a + 1) : (a^2 + 3) \text{ (vì } a \in \mathbb{Z} \text{ nên } 4a + 1 \in \mathbb{Z})$ $\Rightarrow (16a^2 - 1) : (a^2 + 3)$ $\Rightarrow [16(a^2 + 3) - 49] : (a^2 + 3)$ $\Rightarrow 49 : (a^2 + 3)$ +) Tìm a, thử lại và kết luận $a \in \{-2; 2\}$	0,5 0,5 0,5 0,5
3	a. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (x - 1)(2x - 1)(2x^2 - 3x - 1) + 2017$ b. Giải phương trình: $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 + \frac{x+1}{x-4} - 3\left(\frac{2x-4}{x-4}\right)^2 = 0$	
	a) $A = (x - 1)(2x - 1)(2x^2 - 3x - 1) + 2017$ $= (2x^2 - 3x + 1)(2x^2 - 3x - 1) + 2017$ $= (2x^2 - 3x)^2 - 1 + 2017 = (2x^2 - 3x)^2 + 2016 \geq 2016$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$ Vậy $A_{\min} = 2016 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$	0,5 0,5 0,75 0,25
	b) $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 + \frac{x+1}{x-4} - 3\left(\frac{2x-4}{x-4}\right)^2 = 0$. Điều kiện $x \notin \{2; 4\}$ $\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 + \frac{x+1}{x-4} - 12\left(\frac{x-2}{x-4}\right)^2 = 0 \quad (*)$ Đặt $\frac{x+1}{x-2} = a$ và $\frac{x-2}{x-4} = b$ suy ra $ab = \frac{x+1}{x-4}$ Phương trình (*) trở thành : $a^2 + ab - 12b^2 = 0$	0,25 0,25

	$\Leftrightarrow (a - 3b)(a + 4b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ a = -4b \end{cases}$	0,25
	+ Nếu $a = 3b$ thì $\frac{x+1}{x-2} = 3 \cdot \frac{x-2}{x-4}$ $\Rightarrow (x+1)(x-4) = 3(x-2)^2$ Giải phương trình trên và kết luận phương trình vô nghiệm	0,5
	+ Nếu $a = -4b$ thì $\frac{x+1}{x-2} = -4 \cdot \frac{x-2}{x-4}$ $\Rightarrow (x+1)(x-4) = -4(x-2)^2$ Giải phương trình trên ta được $\begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{4}{5} \end{cases}$ (tmđk)	0,5
	+ Kết luận nghiệm của phương trình $S = \left\{ 3; \frac{4}{5} \right\}$	0,25
4	a. Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác thỏa mãn: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Chứng minh tam giác đều. b. Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng : $\frac{1}{x^2+2yz} + \frac{1}{y^2+2xz} + \frac{1}{z^2+2xy} \geq 9$	
	a) C/m: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ +) Từ giả thiết suy ra: $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$ $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \quad (\text{vì } a + b + c > 0)$	0,5
	+) Biến đổi được kết quả: $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ b - c = 0 \\ c - a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c \Rightarrow \text{Tam giác đó là đều (đpcm)}$	0,25
	b) Đặt $a = x^2 + 2yz; b = y^2 + 2xz; c = z^2 + 2xy$ $\Rightarrow a, b, c > 0 \text{ và } a + b + c = (x + y + z)^2 = 1$	0,5
	+) C/m: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$	0,5
	$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} = 9 \text{ hay } \frac{1}{x^2+2yz} + \frac{1}{y^2+2xz} + \frac{1}{z^2+2xy} \geq 9 \text{ (đpcm)}$	0,5
5	Cho O là trung điểm của đoạn AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là cạnh AB vẽ tia Ax, By cùng vuông góc AB. Trên tia Ax lấy điểm C (khác A), qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By tại D. a. Chứng minh $AB^2 = 4 AC \cdot BD$ b. Kẻ OM vuông góc CD tại M. Chứng minh $AC = CM$	

	Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow AC=BD=\frac{AB}{2}=OA$ Vậy C thuộc tia Ax và cách điểm A một đoạn bằng OA	0,25
6	Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\frac{2016}{x+y} + \frac{x}{y+2015} + \frac{y}{4031} + \frac{2015}{x+2016} = 2$	
	+) Với a, b, c, d dương, ta có $F = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b}$ $= \left(\frac{a}{b+c} + \frac{c}{d+a} \right) + \left(\frac{b}{c+d} + \frac{d}{a+b} \right) = \frac{a(d+a)+c(b+c)}{(b+c)(d+a)} + \frac{b(a+b)+d(c+d)}{(c+d)(a+b)} \geq$ $\geq \frac{a^2+c^2+ad+bc}{\frac{1}{4}(b+c+d+a)^2} + \frac{b^2+d^2+ab+cd}{\frac{1}{4}(c+d+a+b)^2} = \frac{4(a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ad+bc+cd)}{(a+b+c+d)^2}$ (theo bất đẳng thức $xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2$)	0,5
	+) Mặt khác: $2(a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ad+bc+cd) - (a+b+c+d)^2$ $= a^2+b^2+c^2+d^2 - 2ac - 2bd = (a-c)^2 + (b-d)^2 \geq 0$ Suy ra $F \geq 2$ và đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = c; b = d$ +) Áp dụng với $a = 2016, b = x, c = y, d = 2015$ ta có: $\frac{2016}{x+y} + \frac{x}{y+2015} + \frac{y}{4031} + \frac{2015}{x+2016} \geq 2$	0,25
	Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow y = 2016; x = 2015$	0,25

Lưu ý :

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày những ý cơ bản, nếu học sinh có cách giải khác mà đúng thì Giám khảo vẫn cho điểm nhưng không vượt quá thang điểm của mỗi ý đó.
- Phần hình học, học sinh không vẽ hình thì không cho điểm.
- Tổng điểm toàn bài bằng tổng điểm của các câu không làm tròn.