SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP THÀNH PHỐ
NĂM HỌC 2022 – 2023

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: **TOÁN**
Ngày thi: *08 tháng 01 năm 2023*
Thời gian làm bài: *150 phút*

Bài I (*5,0 điểm*)

1) Giải phương trình $\sqrt{x^2+2x+6}+x^2=\sqrt{2x+2}-x+3.$

2) Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\dfrac{a^2}{a^2+1}=b,\ \dfrac{8b^2}{4b^2+1}=c$ và $\dfrac{2c^2}{c^2+1}=a.$ Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c.$

Bài II (*5,0 điểm*)

1) Tìm tất cả số nguyên dương n để $3n+1$ và $12n-11$ là các số chính phương.

2) Cho $P(x)=a_0x^{2022}+a_1x^{2021}+a_2x^{2020}+\ldots+a_{2022}$ là đa thức với hệ số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện $P(k)=\dfrac{1}{k+1}$, với $k=0,1,2,...,2022.$ Tính giá trị $P(2023).$

Bài III (*2,0 điểm*)

Với a,b,c là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=16,$ tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}.$

Bài IV (*6,0 điểm*)

Cho tam giác ABC vuông tại $A\,(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến tại A và C của đường tròn (O) cắt nhau tại điểm S. Trên tia đối của tia CA lấy điểm M (M khác C). Qua S kẻ đường thẳng vuông góc với OM, cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt E,F (E nằm giữa S và F).

a) Chứng minh đường thẳng ME là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Gọi D là chân đường vuông góc kẻ từ M đến đường thẳng BC. Chứng minh EC là tia phân giác của góc $\widehat{FED}$.

c) Gọi P,Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng MD với hai đường thẳng BE và BF. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ. Chứng minh góc $\widehat{SDK}=90^0$.

Bài V (*2,0 điểm*)

1) Tìm tất cả các số nguyên tố m,n,p thỏa mãn $m^2+3n^2+5p^2-8mnp=0.$

2) Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2023}$. Gọi S là tập hợp gồm các trung điểm của các đoạn thẳng $A_iA_j\,(1\le i<j\le 2023)$ và M là tổng độ dài của tất cả các đoạn thẳng có hai đầu mút là hai điểm thuộc S. Gọi N là tổng độ dài của tất cả các đoạn thẳng $A_iA_j\,(1\le i<j\le 2023).$ Chứng minh $M<1011^2N.$

---------------Hết---------------

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 THÀNH PHỐ HÀ NỘI 2023

Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Đức Hiếu – Đào Phúc Long

1. Đề thi

Bài 1 (5.0 *điểm*).

a) Giải phương trình $\sqrt{x^2+2x+6}+x^2=\sqrt{2x+2}-x+3$.

b) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\frac{a^2}{a^2+1}=b$, $\frac{8b^2}{4b^2+1}=c$ và $\frac{2c^2}{c^2+1}=a$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$.

Bài 2 (5.0 *điểm*).

a) Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn $3n+1$ và $12n-11$ là số chính phương.

b) Cho đa thức $P(x)$ có bậc không quá 2022 thỏa mãn $P(k)=\frac{1}{k+1}$ với mọi $k=0,1,\dots,2022$. Tính giá trị của $P(2023)$.

Bài 3 (2.0 *điểm*). Xét các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=16$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$.

Bài 4 (6.0 *điểm*). Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến tại A và C của đường tròn (O) cắt nhau tại điểm S. Trên tia đối của tia CA, lấy điểm M (M khác C). Qua điểm S, kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng OM, cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt E, F (E nằm giữa S và F).

a) Chứng minh rằng đường thẳng ME là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Gọi D là chân đường vuông góc kẻ từ điểm M đến đường thẳng BC. Chứng minh rằng EC là tia phân giác của góc FED.

c) Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng MD với hai đường thẳng BE và BF; K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ. Chứng minh rằng $\angle SDK=90^\circ$.

Bài 5 (2.0 *điểm*).

a) Tìm tất cả các số nguyên tố m, n, p thỏa mãn $m^2+3n^2+5p^2-8mnp=0$.

b) Cho đa giác đều $A_1A_2\dots A_{2023}$. Gọi S là tập hợp gồm các trung điểm của các đoạn thẳng A_iA_j $(1\le i<j\le 2023)$ và M là tổng độ dài của tất cả các đoạn thẳng có hai đầu mút là hai điểm thuộc tập S. Gọi N là tổng độ dài của tất cả các đoạn thẳng A_iA_j $(1\le i<j\le 2023)$. Chứng minh rằng $M<1011^2N$.

2. Lời giải và bình luận các bài toán

Bài 1 (5.0 *điểm*).

a) Giải phương trình $\sqrt{x^2+2x+6}+x^2=\sqrt{2x+2}-x+3$.

b) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\frac{a^2}{a^2+1}=b$, $\frac{8b^2}{4b^2+1}=c$ và $\frac{2c^2}{c^2+1}=a$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$.

Lời giải. **a)** Điều kiện: $x\ge -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+2x+6}-3+(x^2+x-2)+\left(2-\sqrt{2x+2}\right)=0,$$

hay

$$\frac{(x-1)(x+3)}{\sqrt{x^2+2x+6}+3}+(x-1)(x+2)-\frac{2(x-1)}{\sqrt{2x+2}+2}=0.$$

Phương trình trên có thể được viết lại thành

$$(x-1)\left(\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+6}+3}+x+2-\frac{2}{\sqrt{2x+2}+2}\right)=0.$$

Vì $x\ge -1$ nên $\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+6}+3}>0$ và $x+2-\frac{2}{\sqrt{2x+2}+2}\ge x+2-\frac{2}{2}=x+1\ge 0$. Do đó, từ phương trình trên, ta suy ra $x=1$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn. Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

b) Từ giả thiết, dễ thấy $a, b, c\ge 0$. Nếu trong a, b, c có một số bằng 0 thì hiển nhiên các số còn lại cũng bằng 0 và như vậy, trong trường hợp này, ta có $P=0$.

Xét trường hợp $a, b, c>0$. Khi đó, từ giả thiết, ta có

$$16abc=(a^2+1)(4b^2+1)(c^2+1).$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$(a^2+1)(4b^2+1)(c^2+1)\ge 2a\cdot 4b\cdot 2c=16abc.$$

Vì dấu đẳng thức phải xảy ra nên ta phải có $a=1$, $b=\frac{1}{2}$ và $c=1$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn. Và như vậy, trong trường hợp này, ta có $P=1+1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.

Vậy $P=0$ (khi $a=b=c=0$) hoặc $P=\frac{5}{2}$ (khi $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $c=1$). □

Bài 2 (5.0 *điểm*).

a) Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn $3n+1$ và $12n-11$ là số chính phương.

b) Cho đa thức $P(x)$ có bậc không quá 2022 thỏa mãn $P(k)=\frac{1}{k+1}$ với mọi $k=0, 1, \ldots,$ 2022. Tính giá trị của $P(2023)$.

Lời giải. **a)** Đặt $3n+1=a^2$ và $12n-11=b^2$ với a, b nguyên dương. Khi đó, ta có

$$(2a-b)(2a+b)=4(3n+1)-(12n-11)=15.$$

Đến đây, bằng cách xét các trường hợp cụ thể với chú ý $2a-b<2a+b$ và $2a+b>0$, ta được $(a,\ b)\in\{(4,\ 7),\ (2,\ 1)\}$. Một cách tương ứng, ta có $n\in\{1,\ 5\}$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn. Vậy, có hai giá trị n thỏa mãn yêu cầu đề bài là $n=1$ và $n=5$.

b) Đặt $Q(x)=(x+1)P(x)-1$, khi đó $Q(x)$ có bậc không quá 2023 và $Q(-1)=-1$. Ngoài ra, theo giả thiết, ta có $Q(0)=Q(1)=\cdots=Q(2022)=0$. Do đó, với chú ý $\deg Q\le 2023$, ta có $Q(x)=M(x-0)(x-1)\cdots(x-2022)$ với M là một số thực nào đó.

Vì $Q(-1)=-1$ nên $-1=M(-1-0)(-1-1)\cdots(-1-2022)=-M\cdot 2023!$, suy ra $M=\frac{1}{2023!}$. Từ đó $Q(x)=\frac{1}{2023!}x(x-1)\cdots(x-2022)$, suy ra

$$(x+1)P(x)-1=\frac{1}{2023!}x(x-1)\cdots(x-2022).$$

Cho $x=2023$, ta được $2024P(2023)-1=\frac{1}{2023!}\cdot 2023\cdot 2022\cdots 1=1$. Suy ra $P(2023)=\frac{1}{1012}$. □

Bài 3 (2.0 *điểm*)**.** Xét các số nguyên dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=16$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có

$$P+3=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=16\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Do $a,b\ge 1$ nên $c\le 14$, suy ra $(c-1)(c-14)\le 0$. Từ đó $14\le 15c-c^2$, hay $\frac{14}{c}\le 15-c$. Tương tự, ta cũng có $\frac{14}{a}\le 15-a$ và $\frac{14}{b}\le 15-b$. Do đó

$$14\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le 45-(a+b+c)=29.$$

Suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{29}{14}$. Như vậy, ta có $P+3\le 16\cdot\frac{29}{14}=\frac{232}{7}$, hay $P\le\frac{211}{7}$. Mặt khác, dễ thấy với $a=b=1$ và $c=14$ thì $P=\frac{211}{7}$. Vậy, giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{211}{7}$.

Tiếp theo, ta sẽ tìm giá trị nhỏ nhất của P. Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó, ta có $a\ge\frac{a+b+c}{3}=\frac{16}{3}$. Mà a là số nguyên dương nên $a\ge 6$.

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{1}{a}+\frac{4}{b+c}=\frac{1}{a}+\frac{4}{16-a}.$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{a}+\frac{4}{16-a}\ge\frac{17}{30}$, hay

$$(a-6)(17a-80)\ge 0.$$

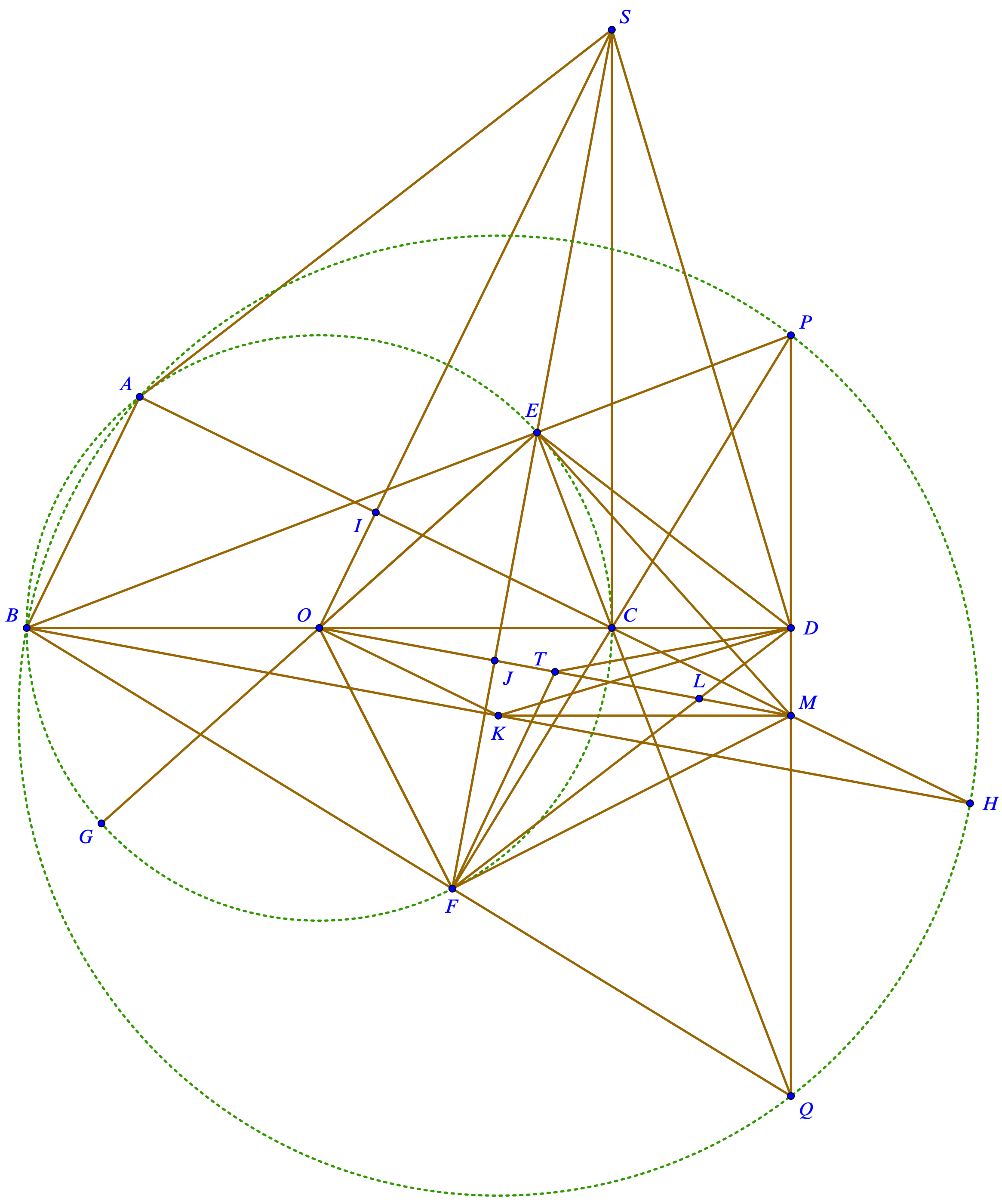
Bất đẳng thức này đúng vì $a-6\ge 0$ và $17a-80\ge 17\cdot 6-80>0$. Như vậy, ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{17}{30}$. Suy ra $P+3\ge 16\cdot\frac{17}{30}=\frac{136}{15}$. Từ đó $P\ge\frac{91}{15}$. Mặt khác, với $a=6$ và $b=c=5$ thì $P=\frac{91}{15}$. Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{91}{15}$. □

Bài 4 (6.0 *điểm*)**.** Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến tại A và C của đường tròn (O) cắt nhau tại điểm S. Trên tia đối của tia CA, lấy điểm M (M khác C). Qua điểm S, kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng OM, cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt E, F (E nằm giữa S và F).

a) Chứng minh rằng đường thẳng ME là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Gọi D là chân đường vuông góc kẻ từ điểm M đến đường thẳng BC. Chứng minh rằng EC là tia phân giác của góc FED.

c) Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng MD với hai đường thẳng BE và BF; K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ. Chứng minh rằng $\angle SDK = 90°$.



Lời giải. a) Gọi I là giao điểm của đường thẳng AC và đường thẳng AC; J là giao điểm của đường thẳng OM và đường thẳng EF. Khi đó, dễ thấy hai tam giác OJS và OIM đồng dạng (g-g). Suy ra $\frac{OJ}{OS} = \frac{OI}{OM}$. Từ đó $OJ \cdot OM = OI \cdot OS = OC^2 = OE^2$. Vì thế tam giác OEM vuông tại E, hay nói cách khác, ta có ME là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Dễ thấy năm điểm O, E, D, M, F cùng thuộc đường tròn tâm T, đường kính MO. Gọi L là giao điểm của đường thẳng OM và đường thẳng DF, ta có

$$\angle DTF = \angle DTL + \angle FTL = 2(\angle DOT + \angle FOT) = 2\angle DOF.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $\angle DTF = 2\angle DEF$. Suy ra $\angle DOF = \angle DEF$. Bây giờ, gọi G là giao điểm thứ hai của đường thẳng OE và đường tròn (O), ta có

$$\angle DOF = \angle COG - \angle GOF = 2(\angle CEO - \angle OEF) = 2\angle CEF.$$

Do đó $\angle DEF = 2\angle CEF$. Suy ra EC là tia phân giác của góc FED.

c) Dễ thấy C, E, P, D cùng thuộc một đường tròn và $\angle CPD = \angle CED$, $\angle FEC = \angle FBC$ (chứng minh tương tự như ở câu **b)**). Suy ra $\angle CPD = \angle CED = \angle FEC = \angle FBC$. Mà $\angle FBC + \angle BQP = 90^\circ$ nên $\angle CPD + \angle BQP = 90^\circ$, từ đó $PC \perp BQ$. Lại có $CF \perp BQ$ nên ba điểm P, C, F thẳng hàng. Từ đây, dễ thấy C là trực tâm của tam giác BPQ. Kết hợp với $EC \perp BP$, ta suy ra ba điểm C, Q, E thẳng hàng. Tiếp theo, ta có chú ý rằng

$$\angle PEM = 180^\circ - \angle BEO = 90^\circ - \angle BEO = 90^\circ - \angle EBO = \angle EPM.$$

Suy ra tam giác MPE cân tại M, tức ta có $MP = ME$. Chứng minh tương tự, ta cũng có $MF = MQ$. Mà $ME = MF$ nên $MP = MQ$, tức M là trung điểm của PQ.

Đến đây, bằng cách sử dụng kết quả quen thuộc của trực tâm tam giác, ta có $MK = \frac{1}{2}BC = OC$. Dễ thấy hai tam giác OCD và MDC đồng dạng (g-g), suy ra

$$\frac{MK}{MD} = \frac{OC}{MD} = \frac{CD}{CS}.$$

Từ đó, ta có hai tam giác vuông KMD và SCD đồng dạng (c-g-c). Suy ra $\angle MDK = \angle CDS$. Từ đây, ta có $\angle KDS = \angle KDC + \angle CDS = \angle KDC + \angle MDK = 90^\circ$. □

Bài 5 (2.0 *điểm*).

a) Tìm tất cả các số nguyên tố m, n, p thỏa mãn $m^2 + 3n^2 + 5p^2 - 8mnp = 0$.

b) Cho đa giác đều $A_1A_2\ldots A_{2023}$. Gọi S là tập hợp gồm các trung điểm của các đoạn thẳng A_iA_j $(1 \le i < j \le 2023)$ và M là tổng độ dài của tất cả các đoạn thẳng có hai đầu mút là hai điểm thuộc tập S. Gọi N là tổng độ dài của tất cả các đoạn thẳng A_iA_j $(1 \le i < j \le 2023)$. Chứng minh rằng $M < 1011^2 N$.

Lời giải. a) Nếu cả ba số m, n, p đều lẻ thì $m^2 + 3n^2 + 5p^2$ là số lẻ, suy ra $8mnp$ cũng là số lẻ, mâu thuẫn. Do đó, trong ba số m, n, p có ít nhất một số bằng 2.

Trường hợp 1: $m = 2$. Phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$$3n^2 + 5p^2 + 4 = 16np.$$

Nếu cả n và p đều lẻ thì ta có $n^2, p^2 \equiv 1 \pmod 8$. Suy ra $3n^2 + 5p^2 + 4 \equiv 3 + 5 + 4 \equiv 4 \pmod 8$, từ đó $16np \equiv 4 \pmod 8$, mâu thuẫn. Do đó, trong hai số n, p có ít nhất một số bằng 2. Tuy nhiên, bằng cách thử trực tiếp hai trường hợp, ta đều không tìm được cặp số (n, p) thỏa mãn yêu cầu.

Trường hợp 2: $n = 2$. Phương trình đã cho có thể được viết lại thành $m^2 + 5p^2 + 12 = 16mp$, hay

$$(m - 8p)^2 - 59p^2 = -12.$$

Suy ra $(m-8p)^2-59p^2 \equiv 0 \pmod 3$, từ đó $(m-8p)^2+p^2 \equiv 0 \pmod 3$. Mà $(m-8p)^2 \equiv 0,\ 1 \pmod 3$ và $p^2 \equiv 0,\ 1 \pmod 3$ nên điều này xảy ra chỉ khi $m - 8p$ và p cùng chia hết cho 3. Từ đó, ta có $m = p = 3$. Thử lại, ta thấy không thỏa mãn.

Trường hợp 3: $p = 2$. Phương trình đã cho được viết lại thành $m^2 - 16mn + 3n^2 + 20 = 0$, hay

$$(m - 8n)^2 - 61n^2 = -20.$$

Suy ra $(m-8n)^2-61n^2 \equiv 1 \pmod 3$, hay $(m-8n)^2-n^2 \equiv 1 \pmod 3$. Mà $(m-8n)^2 \equiv 0,\ 1 \pmod 3$ và $n^2 \equiv 0,\ 1 \pmod 3$ nên điều này xảy ra chỉ khi $(m-8n)^2 \equiv 1 \pmod 3$ và $n^2 \equiv 0 \pmod 3$. Suy ra $n = 3$. Thay trở lại phương trình đã cho, ta được $m = 47$.

Vậy, có duy nhất một bộ số $(m,\ n,\ p)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(47,\ 3,\ 2)$.

b) Từ các điểm $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{2023}$, ta xét tất cả các tam giác và tứ giác có đỉnh là 2023 điểm trên. Ta có hai bổ đề sau.

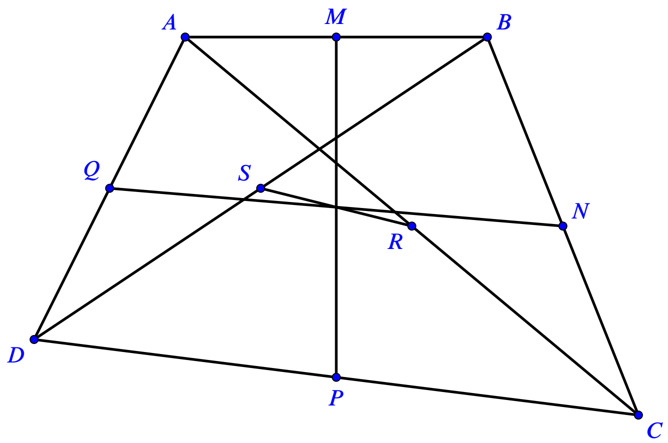
Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC có $M,\ N,\ P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC,\ CA,\ AB$. Khi đó*

$$MN + NP + MP = \frac{AB + BC + CA}{2}. \tag{1}$$

Kết quả này được suy ra trực tiếp từ tính chất đường trung bình của tam giác.

Bổ đề 2. *Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $M,\ N,\ P,\ Q,\ R,\ S$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB,\ BC,\ CD,\ DA,\ AC$ và BD. Khi đó*

$$MP + NQ + SR < \frac{AB + BC + CD + DA + AC + BD}{2}. \tag{2}$$



Chứng minh. Theo bất đẳng thức tam giác, ta có

$$MP < MN + NP = \frac{AC}{2} + \frac{BD}{2} = \frac{AC + BD}{2}.$$

Chứng minh tương tự, ta được

$$NQ < QS + SN = \frac{AB + CD}{2}, \quad SR < SP + PR = \frac{AD + BC}{2}$$

Kết hợp các bất đẳng thức trên, ta có bất đẳng thức (2). ■

Trở lại bài toán, ta có các nhận xét sau.

- Với mỗi đoạn thẳng có hai đầu mút là hai trong các điểm thuộc tập S thì hoặc nó là đường trung bình trong một tam giác có các đỉnh là đỉnh của đa giác đều đã cho, hoặc nó là đoạn nối trung điểm hai cạnh đối điện, hoặc là đoạn nối trung điểm hai đường chéo trong một tứ giác có các đỉnh là đỉnh của đa giác đều đã cho.

- Mỗi đoạn thẳng A_iA_j $(1 \leq i < j \leq 2023)$ sẽ là cạnh của 2021 tam giác có các đỉnh là đỉnh của đa giác đều đã cho, và là cạnh (hoặc đường chéo) của C_{2021}^2 tứ giác có các đỉnh là đỉnh của đa giác đều đã cho.

Như vậy, với mỗi tam giác và tứ giác có đỉnh lấy từ 2023 điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2023}$, ta thiết lập được các đẳng thức và bất đẳng thức tương tự (1) và (2). Cộng tất cả các đẳng thức và bất đẳng thức này lại, kết hợp với hai nhận xét ở trên, ta thu được

$$M < \frac{2021 + C_{2021}^2}{2} N < 1011^2 N.$$

Bài toán được chứng minh xong. $\square$