

Bài 1 (1.0 điểm). Cho các số thực x, y thỏa mãn:

$$(x + \sqrt{x^2 + 2018})(y + \sqrt{y^2 + 2018}) = 2018. \text{ Chứng minh rằng tích } xy \text{ là một số không dương.}$$

Bài 2 (1.0 điểm). So sánh $B = \sqrt{11 + \sqrt{96}}$ và $C = \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$

Bài 3 (1.0 điểm). Chứng minh rằng biểu thức $D = \sqrt[3]{17\sqrt{5} + 38} - \sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38}$ là một số chính phương.

Bài 4 (1.0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A. Các đường trung tuyến AD và BE vuông góc với nhau tại G. Biết $AB = \sqrt{6}$ cm, tính cạnh huyền BC.

Bài 5 (1.0 điểm). Cho $x = \frac{\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}}$, tính giá trị của biểu thức $E = bx^2 - ax + b$

Bài 6 (1.0 điểm). Giải phương trình nghiệm nguyên: $8x^2y^2 + x^2 + y^2 = 10xy$

Bài 7 (1.0 điểm). Tổng của n số nguyên dương không nhất thiết phân biệt là 100. Tổng của 7 số trong số chúng nhỏ hơn 15. Tìm giá trị nhỏ nhất của n ?

Bài 8 (1.0 điểm). Cho tam giác ABC có $BC = a, AC = b, AB = c$. CMR: $\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{b+c}$

Bài 9 (1.0 điểm) Giải phương trình $x\sqrt{3-2x} = 3x^2 - 6x + 4$

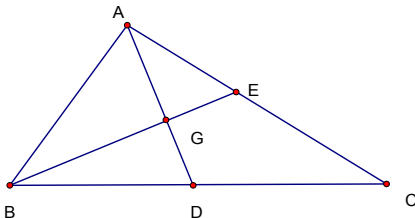
Bài 10 (1.0 điểm). Cho $a, b, c > 0; abc = 2$. Chứng minh rằng:

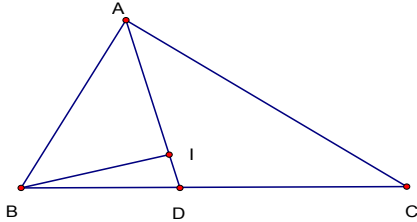
$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}$$

----- Hết -----

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 1 2đ	Nhận xét $(x + \sqrt{x^2 + 2018})(\sqrt{x^2 + 2018} - x) = 2018.$ Suy ra $(\sqrt{x^2 + 2018} - x) = (y + \sqrt{y^2 + 2018})$	1,0
	Tương tự ta có $(\sqrt{x^2 + 2018} + x) = (\sqrt{y^2 + 2018} - y)$ Suy ra $x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y \Leftrightarrow xy = -x^2 \leq 0$	1,0
Bài 2 2đ	Ta có $B = \sqrt{(2\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$	0,75
	$C = \frac{2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$	0,75
	Xét hiệu $B - C = \sqrt{2} - 1 > 0. \text{ Vậy } B > C$	0,5
Bài 3 2đ	Ta có $D^3 = 76 - 3D \Leftrightarrow D^3 + 3D - 76 = 0$	0,75
	$\Leftrightarrow (D - 4)(D^2 + 4D + 19) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 4 \\ (D + 2)^2 + 15 = 0 \end{cases}$	0,75
	Do đó D=4 Vậy D là một số chính phương.	0,5
Bài 4 2đ		
	Ta có $AB^2 = BE \cdot BG = BE \cdot \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3}BE^2 \Leftrightarrow BE = 3 \text{ cm}$ Suy ra BG=2 cm, EG= 1 cm	1,0
	Mà $AG^2 = BG \cdot EG = 2 \Leftrightarrow AG = \sqrt{2} \Leftrightarrow AD = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow BC = 3\sqrt{2} \text{ cm.}$	1,0
Bài 5 2đ	Ta có $x + 1 = \frac{2\sqrt{a+2b}}{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}$ và $x - 1 = \frac{2\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}$	0,75
	Do đó $\frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt{a+2b}}{\sqrt{a-2b}} \Leftrightarrow \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} = \frac{a+2b}{a-2b}$	0,75

	$(x^2 + 2x + 1)(a - 2b) = (x^2 - 2x + 1)(a + 2b)$ Suy ra $E = bx^2 - ax + b = 0$	0,5
Bài 6 2đ	Ta có $8x^2y^2 + x^2 + y^2 = 10xy \Leftrightarrow$ $8xy(xy - 1) + (x - y)^2 = 0 \quad (1).$	0,5
	Từ (1) suy ra $xy(xy - 1) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq xy \leq 1 \Leftrightarrow xy \in \{0; 1\}$	0,5
	Nếu $xy=0$ thì từ (1) ta có $x=y=0$	0,5
	Nếu $xy=1$ thì từ (1) ta có $x=y=1$; $x=y=-1$	0,25
	Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $(x,y)=(0,0);(1,1);(-1,-1)$	0,25
Bài 7 2đ	Ta thấy $n=50$ thoả mãn vì ta có thể chọn 50 số 2.	0,5
	Giả sử tồn tại $n < 50$ thoả mãn, khi đó ta có thể chia chúng thành nhiều nhất 7 nhóm, mỗi nhóm nhiều nhất 7 số.	0,5
	Tổng của mỗi nhóm nhỏ hơn hoặc bằng 14, do đó tổng của n số nhỏ hơn hoặc bằng 98 (vô lý)	0,5
	Vậy GTNN của $n=50$.	0,5
Bài 8 2đ		
	Vẽ đường phân giác AD của tam giác ABC, ta có $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} \Leftrightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{BD+CD}{AB+AC} = \frac{BC}{AB+AC}$ Suy ra $\frac{BD}{AB} = \frac{a}{b+c}$	0,5
	Vẽ BI vuông góc với AD, suy ra $BI \leq BD$	0,5
	Xét tam giác vuông BIA có $\sin \widehat{BAI} = \frac{BI}{AB} \leq \frac{BD}{AB} = \frac{a}{b+c}$	0,5
	Vậy $\sin \frac{\widehat{A}}{2} \leq \frac{a}{b+c}$	0,5
Bài 9 2đ	ĐKXD $x \leq 3/2$	0,25
	$x\sqrt{3-2x} = 3x^2 - 6x + 4 \Leftrightarrow 2x\sqrt{3-2x} = 6x^2 - 12x + 8$ $(5x^2 - 10x + 5) + (x^2 - 2x\sqrt{3-2x} + 3 - 2x) = 0$	0,75
	$5(x-1)^2 + (x - \sqrt{3-2x})^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-\sqrt{3-2x}=0 \end{cases}$ Suy ra $x=1$ thoả mãn	0,75
	Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$	0,25
Bài 10 2đ	Áp dụng BĐT AM-GM, ta có $c^3 + \frac{a^3+b^3}{2} \geq c^3 + \frac{ab(a+b)}{2} = c^3 + \frac{a+b}{c} \geq 2c\sqrt{a+b}.$	0,5

	Chúng minh tương tự ta có $b^3 + \frac{a^3+c^3}{2} \geq 2b\sqrt{a+c}$, $a^3 + \frac{c^3+b^3}{2} \geq 2a\sqrt{c+b}$	0,5
	Cộng các vế của các BĐT trên ta được $a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}$.	0,5
	Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \sqrt[3]{2}$.	0,5