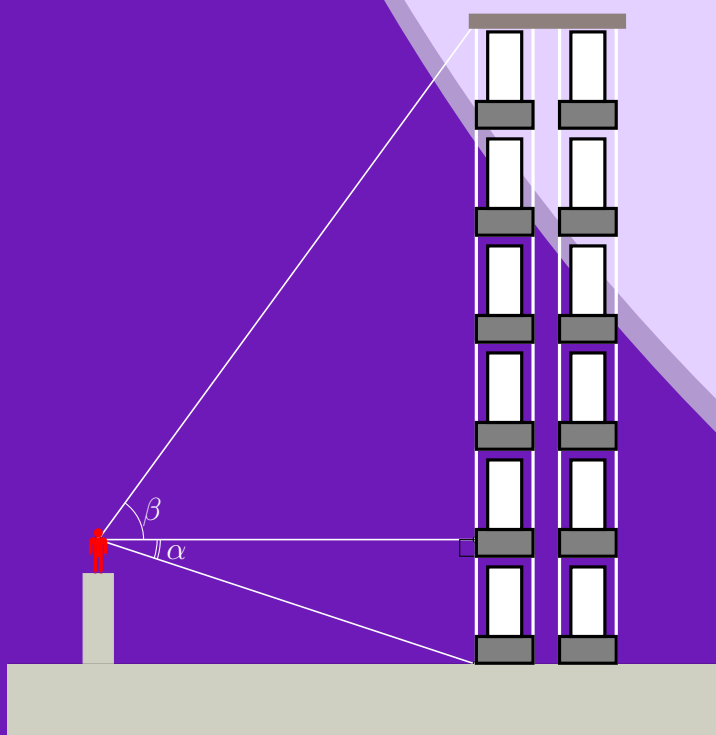


ĐỀ THI HSG TOÁN 9
TOÁN THCS VIỆT NAM

TUYỂN TẬP

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

Lớp
9



Năm - 2020

Biên soạn & sưu tầm: Ths NGUYỄN CHÍNH EM

Mục lục

Đề số 1. Đề thi HSG Lớp 9 - Quận Ba Đình - TP Hà Nội năm 2017	4
Đề số 2. Đề thi HSG Lớp 9 - Quận Cầu Giấy - TP Hà Nội năm 2017-2018, Vòng 1	9
Đề số 3. Đề thi HSG Lớp 9 - TP Hà Nội năm học 2010 - 2011	14
Đề số 4. Đề thi HSG Lớp 9 - TP Hà Nội năm học 2011-2012	19
Đề số 5. Đề thi HSG Lớp 9 - TP Hà Nội, năm học 2012 - 2013	24
Đề số 6. Đề thi HSG Lớp 9 - TP Hà Nội năm học 2013 - 2014	30
Đề số 7. Đề thi HSG Lớp 9 - TP Hà Nội năm học 2014-2015	35
Đề số 8. Đề thi HSG Lớp 9 - TP Hà Nội năm học 2016 - 2017	41
Đề số 9. Đề thi HSG Lớp 9 - Quận Hoàn Kiếm - TP Hà Nội năm 2018	47
Đề số 10. Đề thi Toán 9 HSG năm học 2011, Tp. Đà Nẵng	52
Đề số 11. Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9 năm học 2010-2011, Lâm Đồng . .	57
Đề số 12. Đề thi HSG lớp 9, Nghệ An, Bảng A, năm 2011	62
Đề số 13. Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9 năm học 2010-2011, Quảng B47.65845nh	67
Đề số 14. Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi năm học 2012-2013, An Giang	71
Đề số 15. HSG Toán 9, huyện B47.65845nh Giang, tỉnh Hải Dương, năm học 2012 - 2013	77
Đề số 16. Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi năm học 2012-2013, Tp. Đà Nẵng . . .	81
Đề số 17. Đề thi HSG toán 9 tỉnh Hải Dương năm học 2012-2013.	85
Đề số 18. Đề thi chọn HSG Toán 9 năm học 2012-2013, Tỉnh Hà T47.65845nh	90
Đề số 19. Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi năm học 2012 - 2013, Kiên Giang . . .	95
Đề số 20. Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi năm học 2012-2013 tỉnh Quảng Ninh .	99
Đề số 21. Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9 năm học 2012-2013, Tiền Giang .	104
Đề số 22. Đề thi Toán 9 Học sinh gỏi năm học 2013-2014, Tỉnh Bắc Ninh . .	110

Đề số 23. Đề thi học sinh giỏi Toán 9 năm học 2013-2014, Nghi Xuân, Hà	
Tĩ7.65845nh	115
Đề số 24. Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi năm học 2013-2014, Ninh Thuận	120
Đề số 25. Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9 năm học 2013-2014, Vĩ7.65845nh	
Phúc	123
Đề số 26. Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi năm học 2017-2018, An Giang.	127
Đề số 27. Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi năm học 2016-2017, Sở GD Bến Tre . .	132
Đề số 28. Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi năm học 2016-2017, Hải Phòng	137
Đề số 29. Đề thi HSG Toán 9, Phú Lộc, Thừa Thiên Huế, 2017	144
Đề số 30. Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9 năm học 2016-2017, Thanh Hóa .	148
Đề số 31. Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi năm học 2016-2017, Sở GD&ĐT Thừa	
Thiên Huế	153
Đề số 32. Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9 năm học 2016-2017, Thành phố	
Hồ Chĩ7.65845 Minh	161
Đề số 33. Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi năm học 2017-2018, Bĩ7.65845nh Định	166
Đề số 34. Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9 năm học 2017-2018, Hải Dương .	171
Đề số 35. Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9 năm học 2017-2018, Huyện Tiền	
Hải - Tỉnh Thái Bĩ7.65845nh	178

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 1

ĐỀ THI HSG LỚP 9 - QUẬN BA
ĐÌNH - TP HÀ NỘI NĂM 2017

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - 2\sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}}.$

b) $B = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} \right) : \frac{\sqrt{a^4 - a^2b^2}}{b^2}$ với $a \neq 0; b \neq 0; |a| > |b|.$

Lời giải.

a) Ta có

$$\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - 2\sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}} = \sqrt{(3 - 2\sqrt{5})^2} - 2\sqrt[3]{(1 + \sqrt{5})^3} = 2\sqrt{5} - 3 - 2(1 + \sqrt{5}) = -5.$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} \right) : \frac{\sqrt{a^4 - a^2b^2}}{b^2} \\ &= \frac{(a + \sqrt{a^2 - b^2})^2 - (a - \sqrt{a^2 - b^2})^2}{(a + \sqrt{a^2 - b^2})(a - \sqrt{a^2 - b^2})} \cdot \frac{b^2}{\sqrt{a^4 - a^2b^2}} \\ &= \frac{4a\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2 - (a^2 - b^2)} \cdot \frac{b^2}{\sqrt{a^4 - a^2b^2}} \\ &= \frac{4a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \cdot \frac{b^2}{|a|\sqrt{a^2 - b^2}} \\ &= \frac{4a}{|a|}. \end{aligned}$$

□

Câu 2.

a) Giải phương trình: $\sqrt{\sqrt{3} - x} = x\sqrt{\sqrt{3} + x}.$

b) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = 3.$

Chứng minh rằng $\frac{a}{1 + b^2} + \frac{b}{1 + c^2} + \frac{c}{1 + a^2} > \frac{2018}{2013}.$

Lời giải.

a) ĐK: $0 \leq x \leq \sqrt{3}$.Đặt $t = x\sqrt{3}$ hay $x = \frac{t}{\sqrt{3}}$.Với $t \geq 0$, phương trình trên tương đương với

$$\sqrt{\sqrt{3} - \frac{t}{\sqrt{3}}} = \frac{t}{\sqrt{3}} \sqrt{\sqrt{3} + \frac{t}{\sqrt{3}}} \Leftrightarrow \sqrt{3-t} = \frac{t}{\sqrt{3}} \sqrt{3+t} \Leftrightarrow t^2(3+t) = 3(3-t)$$

$$\Leftrightarrow (t+1)^3 = 10 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{10} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{10} - 1}{\sqrt{3}} \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{\sqrt[3]{10} - 1}{\sqrt{3}}.$$

b) Ta có $\frac{a}{1+b^2} = \frac{a(1+b^2) - ab^2}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$ (Áp dụng BĐT Cô-si)

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}; \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$$

Mặt khác

$$ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$$

Nên

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a + b + c - \frac{ab + bc + ca}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} > \frac{2018}{2013}$$

(đpcm).

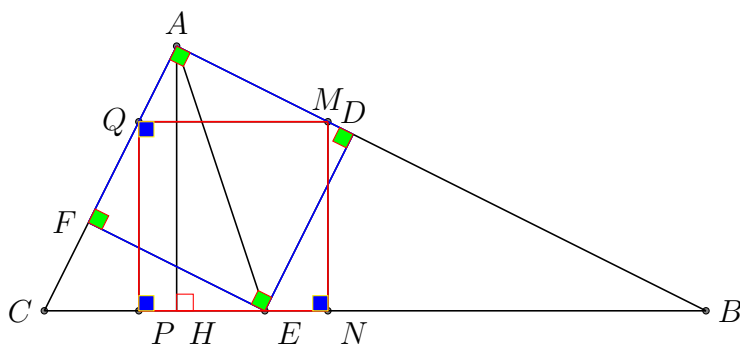
□

Câu 3. Từ điểm A ở ngoài đường tròn tâm O , kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) , (B, C là các tiếp điểm). Trên đoạn OB lấy điểm N sao cho $BN = 2ON$. Đường trung trực của đoạn thẳng CN cắt OA tại M , tính tỉ số $\frac{AM}{AO}$.

Lời giải.



Lời giải.



Gọi r, R là cạnh các hình vuông $ADEF, MNPQ$ và đặt $AB = c, AC = b, BC = a$.

Kẻ đường cao $AH = h$ của tam giác ABC .

Ta có

$$S_{ACB} = S_{AEB} + S_{AEC} = \frac{1}{2}ED \cdot AB + \frac{1}{2}EF \cdot AC = \frac{1}{2}r(AB + AC) = \frac{1}{2}r(b + c)$$

$$\text{Mà } S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}ah$$

$$\text{Từ đó suy ra } r = \frac{ah}{b + c}.$$

Do $MN \parallel AH$ nên theo định lý Ta-lét ta có $\frac{MN}{AH} = \frac{BM}{BA}$.

Và $MQ \parallel BC$ nên theo định lý Ta-lét ta có $\frac{MQ}{BC} = \frac{AM}{AB}$.

$$\text{Nên } \frac{MN}{AH} + \frac{MQ}{BC} = \frac{BM}{BA} + \frac{AM}{AB} \Leftrightarrow \frac{R}{h} + \frac{R}{a} = 1 \Leftrightarrow R = \frac{ah}{a + h}.$$

$$\text{Mặt khác } (a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 = b^2 + c^2 + 2bc + h^2 = (b + c)^2 + h^2 > (b + c)^2.$$

$$\text{Do đó } r^2 = \frac{a^2 h^2}{(b + c)^2} > R^2 = \frac{a^2 h^2}{(a + h)^2} \Leftrightarrow S_{ADEF} > S_{MNPQ}. \quad \square$$

Câu 5.

- Tìm tất cả các số nguyên x để $\sqrt{x + 19}; \sqrt{2x + 10}; \sqrt{3x + 13}; \sqrt{4x + 37}$ đều là số nguyên.
- Trong buổi gặp có 294 người tham gia, những người quen nhau bắt tay nhau. Biết rằng nếu A bắt tay B thì một trong hai người A và B bắt tay không quá 6 lần. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu cái bắt tay.

Lời giải.

- Đặt $\sqrt{x + 19} = a; \sqrt{4x + 37} = b, (a, b \in \mathbb{Z}^+)$

Ta có

$$4a^2 - b^2 = 39 \Leftrightarrow (2a - b)(2a + b) = 39$$

Do $2a > b$ và $a, b \in \mathbb{Z}^+$ nên ta có 2 trường hợp

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{cases} 2a - b = 1 \\ 2a + b = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 19 \end{cases} \Leftrightarrow x = 81, \text{ thử lại thấy sai nên loại.} \\ & \bullet \begin{cases} 2a - b = 3 \\ 2a + b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3, \text{ thử lại thấy đúng nên nhận.} \end{aligned}$$

Vậy $x = -3$.

- b) Do A bắt tay B thì một trong hai người A và B bắt tay không quá 6 lần nên những tham dự hội nghị có số cái bắt tay hoặc hơn 6 hoặc không quá 6.

Giả sử X là tập hợp những người bắt tay hơn 6 lần, Y là tập hợp những người bắt tay không quá 6 lần. $|X| = m, |Y| = n$

Ta có $X \cap Y = \emptyset$ và $m + n = 294$.

Nhận xét: những người trong cùng tập hợp thì không bắt tay với nhau.

Tổng số cái bắt tay $S \leq n \times \min\{6; 294 - n\}$.

Ta có các khả năng sau đây

- $\min = 1 \Rightarrow n = 293 \Rightarrow S = 293$
- $\min = 2 \Rightarrow n = 292 \Rightarrow S = 584$
- $\min = 3 \Rightarrow n = 291 \Rightarrow S = 873$
- $\min = 4 \Rightarrow n = 290 \Rightarrow S = 1160$
- $\min = 5 \Rightarrow n = 289 \Rightarrow S = 1445$
- $\min = 6 \Rightarrow 294 - n \geq 6 \Rightarrow n \leq 288 \Rightarrow S \leq 288 \times 6 = 1728$

Do đó $S \leq 1728$. Vậy có nhiều nhất 1728 cái bắt tay.

□

————— HẾT —————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 2

ĐỀ THI HSG LỚP 9 - QUẬN CẦU
GIẤY - TP HÀ NỘI NĂM
2017-2018, VÒNG 1

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1.

1) Cho biểu thức $A = \left(\frac{6x+4}{3\sqrt{3x^3}-8} - \frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4} \right) \left(\frac{1+3\sqrt{3x^3}}{1+\sqrt{3x}} - \sqrt{3x} \right)$ với $x \geq 0$;
 $x \neq \frac{4}{3}$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

2) Cho biểu thức

$$P = \frac{1}{3+2a+b+ab} + \frac{1}{3+2b+c+bc} + \frac{1}{3+2c+a+ca}.$$

với a, b, c là các số thực làm cho P xác định và thỏa mãn điều kiện

$$a+b+c+ab+bc+ca+abc=0.$$

Chứng minh rằng $P=1$.

Lời giải.

1)

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } A &= \left(\frac{6x+4}{3\sqrt{3x^3}-8} - \frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4} \right) \left(\frac{1+3\sqrt{3x^3}}{1+\sqrt{3x}} - \sqrt{3x} \right) \\ &= \left[\frac{6x+4-(\sqrt{3x}-2)\sqrt{3x}}{(\sqrt{3x}-2)(3x+2\sqrt{3x}+4)} \right] (3x-\sqrt{3x}+1-\sqrt{3x}) \\ &= \left[\frac{3x+2\sqrt{3x}+4}{(\sqrt{3x}-2)(3x+2\sqrt{3x}+4)} \right] (3x-2\sqrt{3x}+1) \\ &= \frac{(\sqrt{3x}-1)^2}{\sqrt{3x}-2}. \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có } A = \frac{3x-2\sqrt{3x}+1}{\sqrt{3x}-2} = \frac{3x-3}{\sqrt{3x}-2} - 2. \text{ Suy ra } A \in \mathbb{Z} \text{ khi và chỉ khi } B = \frac{3x-3}{\sqrt{3x}-2} \in \mathbb{Z}.$$

Nếu $3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện).

Nếu $3x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $\begin{cases} \sqrt{3x} - 2 \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{3x} - 2 \in \mathbb{I} \end{cases}$

- Nếu $\sqrt{3x} - 2 \in \mathbb{I}$ thì $A \in \mathbb{I}$ (Vô lý).
- Nếu $\sqrt{3x} - 2 \in \mathbb{Z}$ thì $B = \sqrt{3x} + 2 + \frac{1}{\sqrt{3x} - 2}$

Do đó $B \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $\sqrt{3x} - 2 \in \{-1; 1\}$, từ đó tìm được $x = 3$ thỏa mãn yêu cầu.

Vậy $x \in \{1; 3\}$.

2) Đẳng thức điều kiện tương đương với $(1+a)(1+b)(1+c) = 1 \Rightarrow 1+a, 1+b, 1+c \neq 0$.

Do đó, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{1 + (1+a) + \frac{1}{1+a}} + \frac{1}{1 + (1+b) + \frac{1}{1+b}} + \frac{1}{1 + (1+c) + \frac{1}{1+c}} \\ &= \frac{1}{1 + (1+a) + \frac{1}{1+a}} + \frac{1}{1 + (1+b) + \frac{1}{1+b}} + \frac{1}{1 + (1+c) + \frac{1}{1+c}} \\ &= \frac{1}{1 + (1+a) + \frac{1}{1+a}} + \frac{1}{1 + (1+b) + \frac{1}{1+b}} + \frac{1}{1 + (1+c) + \frac{1}{1+c}} \\ &= \frac{1 + (1+a) + \frac{1}{1+a}}{1 + (1+a) + \frac{1}{1+a}} = 1. \end{aligned}$$

□

Câu 2.

a) Giải phương trình: $x^2 + 6 = 4\sqrt{x^3 - 2x^2 + 3}$.

b) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2(x - y) = 5(y - 1)$.

Lời giải.

a) Điều kiện: $x \geq -1$. Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} \text{Phương trình} &\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 3) + 3(x + 1) = 4\sqrt{(x + 1)(x^2 - 3x + 3)} \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{3(x + 1)}{x^2 - 3x + 3} = 4\sqrt{\frac{x + 1}{x^2 - 3x + 3}} \quad (\text{vì } x^2 - 3x + 3 > 0, \forall x). \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x + 1}{x^2 - 3x + 3}}$ ($t \geq 0$), ta được phương trình:

$$1 + 3t^2 = 4t \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ t = \frac{1}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \end{cases}$$

- Với $t = 1$, ta có: $\sqrt{\frac{x + 1}{x^2 - 3x + 3}} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

- Với $t = \frac{1}{3}$, ta có: $\sqrt{\frac{x+1}{x^2-3x+3}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 - 12x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6 \pm \sqrt{42}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{2 \pm \sqrt{2}; 6 \pm \sqrt{42}\}$.

b) Ta có $x^2(x-y) = 5(y-1) \Leftrightarrow x^2(x-y) = 5(y-x) + 5(x-1)$
 $\Leftrightarrow (x-y)(x^2+5) = 5(x-1)$

Suy ra: $5(x-1) : (x^2+5)$ (1)

Do đó: $[5(x^2+5) - 5x(x-1)] : (x^2+5) \Rightarrow 25 + 5x : (x^2+5)$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $(25+5x) - 5(x-1) : (x^2+5) \Rightarrow 30 : (x^2+5)$.

Suy ra: $x^2+5 \in \{5; 6; 10; 15; 30\} \Leftrightarrow x^2 \in \{0; 1; 5; 10; 25\}$.

Từ đó tìm được $x \in \{0; 1; -1; 5; -5\}$.

Thử lại vào phương trình đã cho, ta được các nghiệm nguyên của phương trình là

$$(x; y) \in \{(0; 1); (1; 1); (-5; -4)\}.$$

□

Câu 3.

- a) Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3}$$

- b) Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(x; y; z)$ thỏa mãn $\frac{x+y\sqrt{2017}}{y+z\sqrt{2017}}$ là số hữu tỷ, đồng thời $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố.

Lời giải.

- a) Ta có $a^2 + 2b^2 + 3 = a^2 + b^2 + b^2 + 1 + 2 \geq 2ab + 2b + 2 = 2(ab + b + 1)$

Tương tự ta có $b^2 + 2c^2 + 3 \geq 2(bc + c + 1)$; $c^2 + 2a^2 + 3 \geq 2(ca + a + 1)$.

Do đó $A \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} \right)$.

Ta chứng minh được $\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} = 1$, suy ra $A \leq \frac{1}{2}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là $\frac{1}{2}$ khi $a = b = c = 1$.

- b) Ta có $\frac{x+y\sqrt{2017}}{y+z\sqrt{2017}} = \frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$).

$$\Leftrightarrow nx - my = (mz - ny) \sqrt{2017} \Rightarrow \begin{cases} nx - my = 0 \\ mz - ny = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{m}{n} \Rightarrow xz = y^2.$$

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 = (x + z)^2 - 2xz + y^2 = (x + z)^2 - y^2 = (x + y + z)(x + z - y)$

Vì $x + y + z > 1$ và $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố nên $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

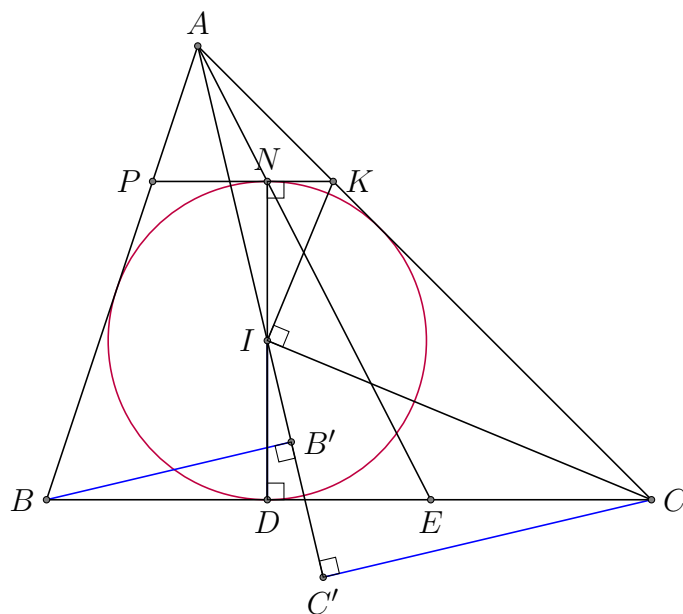
Từ đó suy ra $x = y = z = 1$ (thỏa mãn).

□

Câu 4. Cho đường tròn tâm I bán kính r nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC tại D . Vẽ đường kính DN của đường tròn $(I; r)$. Tiếp tuyến của đường tròn (I) tại N cắt cạnh AB, AC theo thứ tự tại P và K .

- Chứng minh rằng $NK \cdot CD = r^2$.
- Gọi E là giao điểm của AN và BC . Chứng minh rằng $BD = CE$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{IA + IB + IC}{r}$.

Lời giải.



- Ta có $\widehat{ICK} + \widehat{IKC} = \frac{1}{2} (\widehat{DCK} + \widehat{NKC}) = 90^\circ$.
 $\Rightarrow \widehat{KIC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NIK} = \widehat{ICD}$ (cùng phụ $\widehat{DIC}$).
 $\Rightarrow \triangle INK \sim \triangle CDI \Rightarrow \frac{IN}{CD} = \frac{NK}{ID}$.
 Do đó, ta có $NK \cdot CD = IN \cdot ID = r^2$.

b) Chứng minh tương tự câu a ta có $NP.DB = r^2$.

$$\text{Suy ra } NK.CD = NP.DB \Rightarrow \frac{NP}{NK} = \frac{DC}{DB} \Leftrightarrow \frac{NP}{DC} = \frac{NK}{DB} = \frac{NP + NK}{DC + DB} = \frac{PK}{BC}$$

Vì $PK \parallel BC$ nên theo định lý Talet ta có $\frac{NK}{EC} = \frac{AK}{AC} = \frac{PK}{BC}$.

$$\text{Suy ra } \frac{NK}{EC} = \frac{NK}{DB} \Rightarrow EC = DB.$$

c) Đặt $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$. Gọi B' , C' lần lượt là hình chiếu của B , C trên AI .

$$\text{Ta có } cr = IA.BB'; br = IA.CC' \text{ nên } (b+c)r = IA(BB' + CC') \leq IA.a \Rightarrow \frac{IA}{r} \geq \frac{b+c}{a}$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{IB}{r} \geq \frac{a+c}{b}; \frac{IC}{r} \geq \frac{a+b}{c}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{IA + IB + IC}{r} \geq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 6.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$.

Vậy $\frac{IA + IB + IC}{r}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 6 khi $\triangle ABC$ đều.

□

Câu 5. Cho một đa giác đều có 2017 đỉnh. Người ta ghi lên mỗi đỉnh của đa giác số 1 hoặc số 2. Biết rằng có 1007 số 1 và 1010 số 2 và các số trên 3 đỉnh liên tiếp bất kỳ không đồng thời bằng nhau. Hãy tính tổng của tất cả các tích ba số trên 3 đỉnh liên tiếp của đa giác trên.

Lời giải.

Có 2017 đỉnh nên có 2017 tích ba số trên ba đỉnh liên tiếp. Vì 3 đỉnh liên tiếp bất kỳ các số không bằng nhau nên chỉ có 2 loại tích:

- Loại I: Ba số ở ba đỉnh liên tiếp chỉ có một số 2, tích ba số này bằng 2.
- Loại II : Ba số ở ba đỉnh liên tiếp có hai chữ số 2, tích ba số này bằng 4.

Gọi số loại I là x ($x \in \mathbb{N}$) thì số tích loại II là $2017 - x$. Mà số 2 ở 2017 tích này là $1010 \times 3 = 3030$.

$$\text{Ta có phương trình } x.1 + (2017 - x).2 = 3030 \Leftrightarrow x = 1004.$$

Vậy tổng tất cả các tích cần tìm là: $1004 \times 2 + 1013 \times 4 = 6060$.

□

—————HẾT—————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 3

ĐỀ THI HSG LỚP 9 - TP HÀ NỘI
NĂM HỌC 2010 - 2011

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{4x^3 - 16x^2 + 21x - 9}}{\sqrt{x - 1}}$

Lời giải.

Điều kiện: $x > 1$

Ta có $4x^3 - 16x^2 + 21x - 9 = (2x - 3)^2(x - 1)$

$$\text{suy ra } A = |2x - 3| \Leftrightarrow A = \begin{cases} 2x - 3 \text{ với } x \geq \frac{3}{2} \\ 3 - 2x \text{ với } 1 < x < \frac{3}{2} \end{cases} \quad \square$$

Câu 2.

a) Giải phương trình $2(x^2 + 2x + 3) = 5\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$

b) Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $4x^2 - (8y + 11)x + (8y^2 + 14) = 0$.

Tìm y khi x lần lượt đạt được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a) $2(x^2 + 2x + 3) = 5\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 2} \quad (1)$

Ta có $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x^2 + x + 1)$

Điều kiện $x \geq -2$

Đặt $a = x + 2; b = x^2 + x + 1$.

Khi đó phương trình (1) trở thành $2(a + b) = 5\sqrt{ab} \Leftrightarrow a = 4b$ hoặc $b = 4a$

TH1: Nếu $a = 4b$ suy ra $4x^2 + 3x + 2 = 0$ (vô nghiệm)

TH2: Nếu $b = 4a$ suy ra $x^2 - 3x - 7 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3 + \sqrt{37}}{2}$ (chọn) hoặc $x_2 = \frac{3 - \sqrt{37}}{2}$ (loại)

b) Ta có

$$4x^2 - (8y + 11)x + (8y^2 + 14) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8y^2 - 8yx + 4x^2 - 11x + 14 = 0 \quad (2)$$

Để phương trình (2) có nghiệm x thì $\Delta'_y \geq 0$.

Xét

$$\Delta'_y = -16x^2 + 88x - 112 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 14 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3,5$$

Khi x lớn nhất suy ra $x = 3,5$, thay vào phương trình (2) ta được $y = 1,75$

Khi x nhỏ nhất suy ra $x = 2$, thay vào phương trình (2) ta được $y = 1$

Vậy $(x; y) = (2; 1); (3,5; 1,75)$.

□

Câu 3.

- a) Tìm 7 số nguyên dương sao cho tích các bình phương của chúng bằng 2 lần tổng các bình phương của chúng.
- b) Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của:

$$B = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$$

Lời giải.

- a) Gọi 7 số nguyên dương cần tìm là $x_1; x_2; \dots; x_7$.

$$\text{Khi đó theo đề bài } x_1^2 x_2^2 \dots x_7^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_7^2)$$

$$\text{Giả sử } x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_7 \geq 1.$$

$$\text{Khi đó } x_1^2 x_2^2 \dots x_7^2 \leq 2.7.x_1^2 = 14x_1^2 \text{ suy ra } x_2^2 \dots x_7^2 \leq 14$$

$$\text{Mà } x_2^2 x_3^2 \dots x_7^2 \text{ là số chính phương nên } x_2^2 x_3^2 \dots x_7^2 \text{ bằng } 1; 4; 9$$

$$\text{Nếu } x_2^2 x_3^2 \dots x_7^2 = 1 \text{ suy ra } x_2 = \dots = x_7 = 1 \text{ khi đó } x_1^2 + 12 = 0 \text{ vô lý}$$

$$\text{Nếu } x_2^2 x_3^2 \dots x_7^2 = 4 \text{ suy ra } x_2 = 2; x_3 = \dots = x_7 = 1. \text{ Khi đó } x_1 = 3; x_2 = 2; x_3 = \dots = x_7 = 1$$

$$\text{Nếu } x_2^2 x_3^2 \dots x_7^2 = 9 \text{ suy ra } x_2 = 3; x_3 = \dots = x_7 = 1. \text{ Khi đó } x_1 = 2 \text{ vô lý vì } x_1 > x_2$$

Vậy 7 số cần tìm là $(3; 2; 1; 1; 1; 1; 1)$ và các hoán vị.

- b) Ta có $B = 16x^2y^2 + 12x^3 + 12y^3 + 34xy$

$$= 16x^2y^2 + 12(x+y)^3 - 2xy = 16x^2y^2 + 12 - 2xy$$

$$= 16\left(xy - \frac{1}{16}\right)^2 + \frac{191}{16}$$

$$\text{Vậy } B \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } \frac{191}{16} \text{ khi } xy = \frac{1}{16}.$$

Giải hệ
$$\begin{cases} xy = 16 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

ta được $x = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}, y = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$ và hoán vị.

Mặt khác: $0 \leq 4xy \leq (x + y)^2 = 1$ suy ra $0 \leq \left| xy - \frac{1}{16} \right| \leq \frac{3}{16}$.

Ta suy ra $B = 16 \left(xy - \frac{1}{16} \right)^2 + \frac{191}{16} \leq \frac{25}{52}$.

Vậy B lớn nhất bằng $\frac{25}{52}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC .

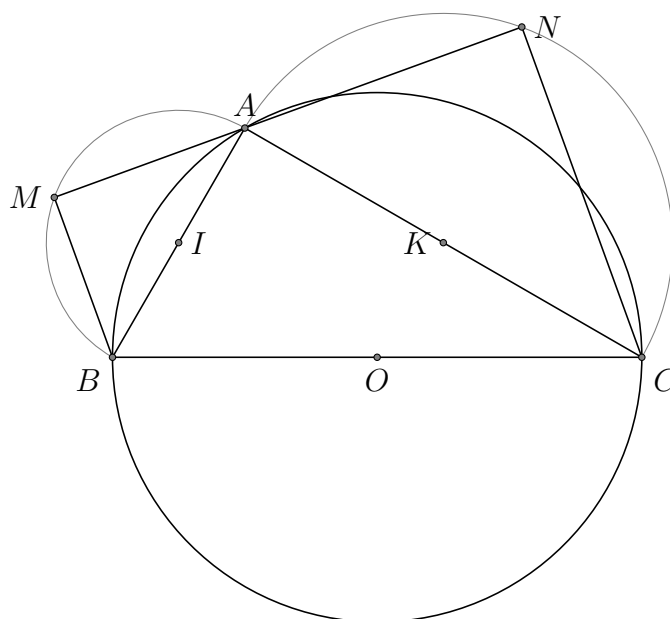
- a) Vẽ về phía ngoài tam giác ABC nửa đường tròn (I) đường kính AB và nửa đường tròn (K) đường kính AC . Đường thẳng qua A cắt hai nửa đường tròn (I) , (K) lần lượt tại các điểm M, N (M khác A, B và N khác A, C).

Tính các góc của tam giác ABC khi diện tích tam giác CAN bằng 3 lần diện tích tam giác AMB .

- b) Cho $AB < AC$ và điểm D thuộc cạnh AC sao cho $AD = AB$. Gọi điểm E là hình chiếu của điểm D trên đường thẳng BC và điểm F là hình chiếu của điểm A trên đường thẳng DE . So sánh $\frac{AF}{AB}$ và $\frac{AF}{AC}$ với $\cos \widehat{AEB}$

Lời giải.

- a) Tính $\widehat{ABC}; \widehat{ACB}$



Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{ANC} = \widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

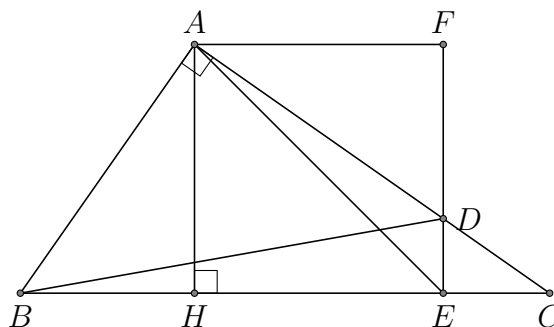
Mặt khác $\widehat{BAM} = \widehat{ACN}$ (cùng phụ với góc CAN). Suy ra $\triangle AMB \sim \triangle CNA$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle AMB}}{S_{\triangle CNA}} = \frac{1}{3} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ = \tan \widehat{ACB}$$

suy ra $\widehat{ACB} = 30^\circ$; $\widehat{ABC} = 60^\circ$

b) Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$)



Ta có $AHEF$ là hình chữ nhật.

Vì $\triangle ABD$ vuông cân tại A suy ra $\widehat{ADB} = 45^\circ$

Vì tứ giác $ADEB$ nội tiếp (vì $\widehat{BAD} + \widehat{DEB} = 180^\circ$)

suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = 45^\circ$ (cùng chắn cung AB)

suy ra $\widehat{AEH} = 45^\circ$ nên $\triangle AHE$ vuông cân tại H

suy ra $AH = HE = AF$.

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên $\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

suy ra $\frac{2}{AC^2} < \frac{1}{AF^2} < \frac{2}{AB^2}$ (vì $AB < AC$).

Nếu $\frac{2}{AC^2} < \frac{1}{AF^2} \Rightarrow \frac{AF}{AC} < \frac{1}{2} = \cos \widehat{AEB} < \frac{AF}{AB}$.

Nếu $\frac{1}{AF^2} < \frac{2}{AB^2} \Rightarrow \frac{AF}{AB} > \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ = \cos \widehat{AEB}$.

Vậy $\frac{AF}{AC} < \cos \widehat{AEB} < \frac{AF}{AB}$.

□

Câu 5. Hai người chơi trò chơi như sau: Trong hộp có 311 viên bi, lần lượt từng người lấy k viên bi, với $k \in \{1; 2; 3\}$. Người thắng là người lấy được viên bi cuối cùng trong hộp bi đó.

a) Hỏi người thứ nhất hay người thứ hai thắng và chiến thuật chơi thế nào để thắng?

- b) Cũng hỏi như câu trên, khi đề bài thay 311 viên bi bằng n viên bi, với n là số nguyên dương?

Lời giải.

- a) Người thứ nhất thắng, chiến thuật chơi như sau

Người thứ nhất lấy 3 viên bi còn 308 viên bi là bội số của 4.

Người thứ hai lấy 1, 2 hoặc 3 viên bi

Người thứ nhất lấy 3, 2 hoặc 1 viên bi

còn lại là bội của 4.

Cứ tiếp tục như vậy thì người lấy cuối cùng phải là người thứ nhất.

- b) Với n viên bi

Nếu n không phải là bội số của 4, với cách làm như trên thì người thứ nhất thắng

Nếu n là bội của 4 thì người thứ hai thắng

□

—————HẾT—————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 4

ĐỀ THI HSG LỚP 9 - TP HÀ NỘI
NĂM HỌC 2011-2012

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1.

a) Chứng minh rằng $(a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}) - (a^{2008} + b^{2008} + c^{2008}) : 30$ với mọi a, b, c nguyên dương.

b) Cho $f(x) = (2x^3 - 21x - 29)^{2012}$. Tính $f(x)$ khi $x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{\frac{49}{8}}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{\frac{49}{8}}}$

Lời giải.

a) Ta có biến đổi sau

$$\begin{aligned} a^{2012} - a^{2008} &= a^{2008} (a^4 - 1) \\ &= a^{2008} (a^2 + 1)(a^2 - 1) \\ &= a^{2008} (a^2 + 1)(a - 1)(a + 1) \\ &= a^{2008} (a^2 - 4 + 5)(a - 1)(a + 1) \\ &= a^{2007} a(a^2 - 4)(a - 1)(a + 1) + 5a^{2007} a(a - 1)(a + 1) \\ &= a^{2007} (a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2) + 5a^{2007} a(a - 1)(a + 1) \end{aligned}$$

Nhận xét

- $a^{2007} (a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2)$ là tích của 5 số tự nhiên liên tiếp suy ra chia hết cho 6 và 5. Mà $(5; 6) = 1$. Suy ra $a^{2007} (a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2) : 30$, (1).
- $5a^{2007} (a - 1)a(a + 1) : 5$. Lại có $(a - 1)a(a + 1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 và chia hết cho 3, suy ra chia hết cho $5a^{2007} (a - 1)a(a + 1) : 6$. Suy ra $5a^{2007} (a - 1)a(a + 1) : 30$, (2).

Từ (1) và (2) suy ra $a^{2007} (a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2) + 5a^{2007} (a - 1)a(a + 1) : 30$.
 $\Rightarrow a^{2012} - a^{2008} : 30$. Tương tự với b và c , suy ra $A : 30$, (đpcm).

- b) Ta có $x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{\frac{49}{8}}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{\frac{49}{8}}} = a + b$. Suy ra $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = 14 + \frac{21}{2}x$.
Tương đương với $2x^3 - 21x - 29 = -1$. Vậy $f(x) = (-1)^{2012} = 1$.

□

Câu 2.

- a) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 5} + 3x = \sqrt{x^2 + 12} + 5$.
b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + x - y - 2y^2 = 0 \\ x^2 - y^2 + x + y = 6. \end{cases}$

Lời giải.

- a) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + 5} - 3 + 3x - 6 - (\sqrt{x^2 + 12} - 4) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} + 3(x - 2) - \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x - 2) \left(\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} + 3 - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 2 \\ \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} + 3 - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 2 \\ (x + 2) \frac{-\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{x^2 + 12} + 1}{(\sqrt{x^2 + 5} + 3)(\sqrt{x^2 + 12} + 4)} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Do đặc điểm của phương trình $\sqrt{x^2 + 5} + 3x = \sqrt{x^2 + 12} + 5$. Suy ra $3x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$,
nên vế trái phương trình thứ hai là số dương, suy ra phương trình hai vô nghiệm.

- b) Từ phương trình $x^2 + xy + x - y - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + 2y + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -2y - 1. \end{cases}$

Thay $x = y$ vào phương trình $x^2 - y^2 + x + y = 6$ ta được $x = y = 3$.

Thay $x = -2y - 1$ vào phương trình $x^2 - y^2 + x + y = 6$ ta được

$$3y^2 + 3y - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 3. \end{cases}$$

Vậy hệ có các nghiệm là $(3; 3), (-3; 1), (3; -2)$.

□

Câu 3. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $2x^2 - 5xy + 3y^2 - x + 3y - 4 = 0$.**Lời giải.**

Từ phương trình $2x^2 - 5xy + 3y^2 - x + 3y - 4 = 0$ ta viết thành

$$(2x - 3y + 3)(x - y - 2) = -2 = -1 \cdot 2 = 2 \cdot (-1) = 1 \cdot (-2) = -2 \cdot 1.$$

Ta có 4 trường hợp xảy ra

$2x - 3y + 3$	2	-1	1	-2
$x - y - 2$	-1	2	-2	1

Vậy ta có bốn cặp nghiệm thỏa mãn là $(4; 3), (16; 12), (2; 2), (14; 11)$. $\square$

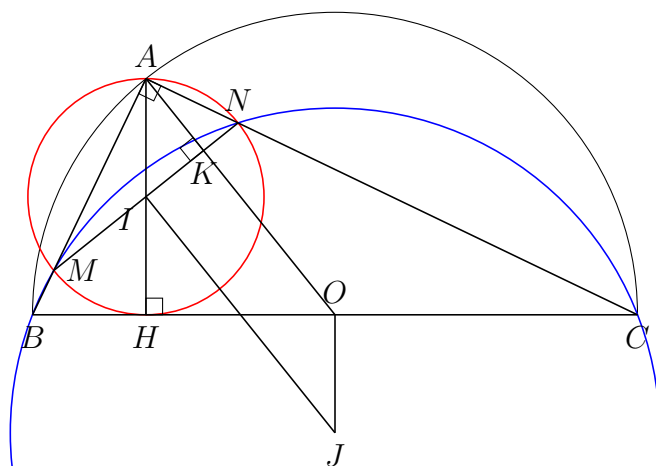
Câu 4. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC và A bất kì nằm trên đường tròn.

Từ A hạ AH vuông góc BC và vẽ đường tròn đường kính HA cắt $AB; AC$ ở M và N .

a) Chứng minh OA vuông góc MN .

b) Cho $AH = \sqrt{2}; BC = \sqrt{7}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN .

Lời giải.



a) Gọi $AO \cap MN = K$, ta có $\widehat{OAC} = \widehat{ACB}$ vì $OA = OC$. Do góc $\widehat{ANM} = \widehat{AHM}$ do cùng chắn cung $\widehat{AM}$, mặt khác $\widehat{AHM} = \widehat{ABH}$ do cùng phụ với góc $\widehat{BAH}$.

Suy ra $\widehat{ANM} = \widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{MC}$ nên $\widehat{OAC} + \widehat{ANM} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{AKN} = 90^\circ$, tức là $AO \perp MN$.

b) Xét tứ giác $BMNC$ có $\widehat{MBC} = \widehat{ANM} \Rightarrow \widehat{MBC} + \widehat{MNC} = \widehat{ANM} + \widehat{MNC} = 180^\circ$.

Suy ra tứ giác $BMNC$ là tứ giác nội tiếp. Gọi $I = AH \cap MN$, gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNC . Do tứ giác $AMHN$ là hình chữ nhật suy ra I là trung điểm của MN , suy ra $IJ \perp MN$. Vậy $JI \parallel AO$, (cùng vuông góc với MN); $JO \parallel AH$ (cùng vuông góc với BC) nên tứ giác $AIGO$ là hình bình hành, suy ra

$$JO = AI = \frac{AH}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\text{cm}); OB = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}(\text{cm}). \text{ Do đó } BJ = \sqrt{OB^2 + JO^2} = \frac{3}{2}(\text{cm}).$$

□

Câu 5.

- a) Chứng minh rằng: Điều kiện cần và đủ để 1 tam giác có các đường cao $h_1; h_2; h_3$ và bán kính đường tròn nội tiếp r là tam giác đều là $\frac{1}{h_1 + 2h_2} + \frac{1}{h_2 + 2h_3} + \frac{1}{h_3 + 2h_1} = \frac{1}{3r}$.
- b) Cho 8045 điểm trên một mặt phẳng sao cho cứ 3 điểm bất kì thì tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng: Luôn có thể có ít nhất 2012 điểm nằm trong tam giác hoặc trên cạnh của một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

Lời giải.

- a) Đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\frac{1}{\frac{S}{a} + \frac{2S}{b}} + \frac{1}{\frac{S}{b} + \frac{2S}{c}} + \frac{1}{\frac{S}{c} + \frac{2S}{a}} = \frac{1}{\frac{3S}{a+b+c}}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $\frac{S}{a} + \frac{2S}{b} = S \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \right) \geq \frac{9S}{a+2b}$.

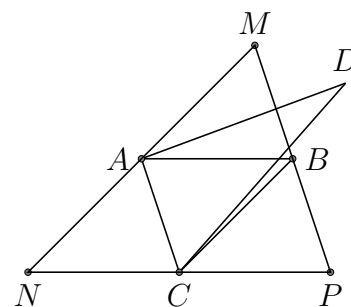
Tương tự ta cũng có $\frac{S}{b} + \frac{2S}{c} \geq \frac{9S}{b+2c}$ và $\frac{S}{c} + \frac{2S}{a} \geq \frac{9S}{c+2a}$.

$$\text{Do đó } \frac{1}{\frac{S}{a} + \frac{2S}{b}} + \frac{1}{\frac{S}{b} + \frac{2S}{c}} + \frac{1}{\frac{S}{c} + \frac{2S}{a}} \leq \frac{1}{\frac{3S}{a+b+c}} = VP.$$

Suy ra dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hay tam giác ABC là tam giác đều.

- b) Trong 8045 điểm luôn tìm được 3 điểm là đỉnh của tam giác có diện tích lớn nhất, giả sử đó là A, B, C với $S_{\triangle ABC} \leq 1$. Dựng các đường thẳng đi qua A song song với BC , qua B song song với AC , qua C song song với AB , chúng đôi một cắt nhau tại M, N, P . Khi đó $S_{\triangle MNP} = 4S_{\triangle ABC} \leq 4$.

Ta sẽ chứng minh rằng 8045 điểm đã cho nằm trong hoặc trên cạnh tam giác MNP . Thật vậy, giả sử tồn tại điểm $D \notin \triangle MNP$, (chẳng hạn D và B cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ chứa AC) thì $S_{\triangle DAC} > S_{\triangle ABC}$ (mâu thuẫn với cách chọn tam giác ABC). Tam giác MNP được chia thành bốn tam giác nhỏ bằng nhau là ANC , AMB , ABC , BCP . Ta có $8045 = 4 \cdot 2011 + 1$. Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất $2011 + 2 = 2012$ điểm phải nằm trong hoặc trên cạnh của một tam giác nhỏ có diện tích không lớn hơn 1.



□

————— HẾT —————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 5

ĐỀ THI HSG LỚP 9 - TP HÀ NỘI,
NĂM HỌC 2012 - 2013

Họ và tên thí sinh: *Lớp:*

Câu 1.

- a) Tìm các số thực a, b sao cho đa thức $4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 3$.
- b) Cho biểu thức $P = (a^{2013} - 8a^{2012} + 11a^{2011}) + (b^{2013} - 8b^{2012} + 11b^{2011})$. Tính giá trị của P với $a = 4 + \sqrt{5}$ và $b = 4 - \sqrt{5}$.

Lời giải.

- a) Đặt $P(x) = 4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6$.
 Ta có $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$. Do đó, $P(x)$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 3$ khi và chỉ khi $P(x)$ chia hết cho cả hai đa thức $x + 1$ và $x - 3$. Theo định lý Bézout về số dư của phép chia đa thức, ta phải có

$$\begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 5b = 9 \\ 18a - 15b = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1. \end{cases}$$

Vậy đa thức $4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 3$ khi và chỉ khi $a = 2, b = 1$.

- b) Ta nhận thấy a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 8x + 11 = 0$. Do đó ta có $a^2 - 8a + 11 = 0$ và $b^2 - 8b + 11 = 0$. Suy ra

$$\begin{aligned} P &= (a^{2013} - 8a^{2012} + 11a^{2011}) + (b^{2013} - 8b^{2012} + 11b^{2011}) \\ &= a^{2011}(a^2 - 8a + 11) + b^{2011}(b^2 - 8b + 11) = 0. \end{aligned}$$

□

Câu 2.

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 6x^2 - y^2 - xy + 5x + 5y - 6 = 0 \\ 20x^2 - y^2 - 28x + 9 = 0. \end{cases}$$

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $6x^2 + 10y^2 + 2xy - x - 28y + 18 = 0$.

Lời giải.

a) Ta có $6x^2 - y^2 - xy + 5x + 5y - 6 = 0 \Leftrightarrow y^2 + (x - 5)y - 6x^2 - 5x + 6 = 0$. (1)

Coi phương trình (1) như là phương trình bậc 2 ẩn y và tham số là x . Khi đó

$$\Delta = (x - 5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6x^2 - 5x + 6) = 25x^2 + 10x + 1 = (5x + 1)^2.$$

Suy ra $y = \frac{-x + 5 + 5x + 1}{2} = 2x + 3$ hoặc $y = \frac{-x + 5 - 5x - 1}{2} = -3x + 2$.

TH1: $y = 2x + 3$, thay vào phương trình $20x^2 - y^2 - 28x + 9 = 0$ ta được

$$20x^2 - (2x + 3)^2 - 28x + 9 = 0 \Leftrightarrow 16x^2 - 40x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \Rightarrow y = 3 \\ x = \frac{5}{2} & \Rightarrow y = 8. \end{cases}$$

TH2: $y = -3x + 2$, thay vào phương trình $20x^2 - y^2 - 28x + 9 = 0$ ta được

$$20x^2 - (-3x + 2)^2 - 28x + 9 = 0 \Leftrightarrow 11x^2 - 16x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & \Rightarrow y = -1 \\ x = \frac{5}{11} & \Rightarrow y = \frac{7}{11}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 4 cặp nghiệm $(x; y)$ là $(0; 3)$, $(\frac{5}{2}; 8)$, $(1; -1)$, $(\frac{5}{11}; \frac{7}{11})$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} &6x^2 + 10y^2 + 2xy - x - 28y + 18 = 0 \\ &\Leftrightarrow 12x^2 + 20y^2 + 4xy - 2x - 56y + 36 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 4y)^2 + (4y - 7)^2 + (x - 1)^2 + 10x^2 - 14 = 0 \\ &\Leftrightarrow 10x^2 - 14 = -(x + 4y)^2 - (4y - 7)^2 - (x - 1)^2 \leq 0 \\ &\Rightarrow x^2 \leq \frac{7}{5} \Rightarrow x \in \{-1; 0; 1\} \text{ (vì } x \text{ là số nguyên).} \end{aligned}$$

- $x = -1$, suy ra $10y^2 - 30y + 25 = 0$ (vô nghiệm).

- $x = 0$, suy ra $10y^2 - 28y + 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{9}{5} \end{cases}$ (loại).

- $x = 1$, suy ra $10y^2 - 26y + 23 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy phương trình có 1 cặp nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(0; 1)$.



Câu 3. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 3$. Chứng minh:

$$\frac{27a^2}{c(c^2 + 9a^2)} + \frac{b^2}{a(4a^2 + b^2)} + \frac{8c^2}{b(9b^2 + 4c^2)} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải.

Đặt $a = \frac{1}{x}$; $b = \frac{2}{y}$; $c = \frac{3}{z}$. Ta có $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 3 \Leftrightarrow x + y + z = 3$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{z^3}{z^2 + x^2} + \frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + x^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Ta có

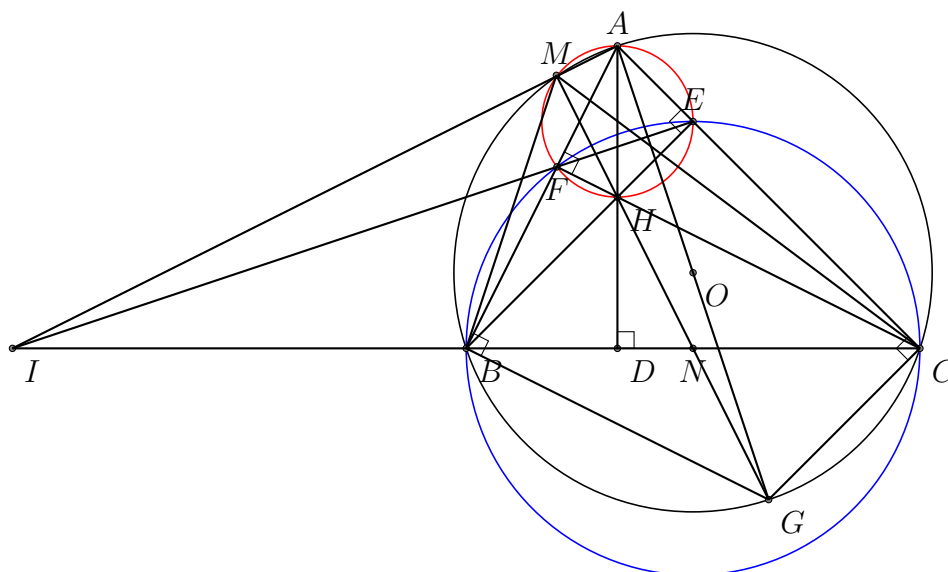
$$\begin{aligned} & \frac{z^3}{z^2 + x^2} + \frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + x^2} \\ &= (x + y + z) - \left(\frac{x^2z}{x^2 + z^2} + \frac{z^2y}{z^2 + y^2} + \frac{y^2z}{y^2 + x^2} \right) \\ &\geq (x + y + z) - \left(\frac{x^2z}{2xz} + \frac{z^2y}{2zy} + \frac{y^2x}{2yx} \right) \\ &\geq (x + y + z) - \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \right) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$ hay $a = 1, b = 2, c = 3$. □

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O) và $AB < AC$. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC gặp nhau tại H . Gọi I là giao điểm hai đường thẳng EF và CB . Đường thẳng AI cắt (O) tại M (M khác A).

- Chứng minh năm điểm A, M, F, H, E cùng nằm trên một đường tròn.
- Gọi N là trung điểm của BC . Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.
- Chứng minh $BM \cdot AC + AM \cdot BC = AB \cdot MC$.

Lời giải.



- a) Xét đường tròn tâm (O) có hai cát tuyến IMA và IBC . Suy ra $IM.IA = IB.IC$. (1)
 Dễ thấy tứ giác $BFEC$ nội tiếp và EF cắt BC tại I nên suy ra $IF.IE = IB.IC$. (2)
 Từ (1) và (2) suy ra $IM.IA = IF.IE$, suy ra tứ giác $AMFE$ nội tiếp.
 Ta lại có tứ giác $AFHE$ nội tiếp đường tròn đường kính AH . Suy ra năm điểm A, M, F, H, E cùng nằm trên đường tròn đường kính AH .

- b) Kẻ đường kính AG của đường tròn (O) . Ta chứng minh G, H, N thẳng hàng.
 Ta có $GC \parallel BE$ (cùng vuông góc với AC) và $GB \parallel CF$ (cùng vuông góc với AB)
 nên tứ giác $HCGB$ là hình bình hành. Suy ra GN đi qua trung điểm N của BC hay
 G, H, N thẳng hàng.

$$\widehat{GMA} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)} \Rightarrow GM \perp AM.$$

Do M thuộc đường tròn đường kính AH (cmt) nên ta có $\widehat{AMH} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow HM \perp AM$.

Suy ra G, H, M thẳng hàng. Từ đó suy ra 4 điểm G, H, M, N thẳng hàng. Vậy ta chứng minh được H, M, N thẳng hàng.

- c) Ta chứng minh định lý Ptoleme: “Nếu một tứ giác nội tiếp đường tròn thì tích hai đường chéo bằng tổng các tích của các cặp cạnh đối diện.”
 Giả sử tứ giác $ABCD$ nội tiếp, ta chứng minh $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

Trên AC lấy điểm K sao cho $\widehat{ABK} = \widehat{CBD}$. Xét tam giác ABK và tam giác DBC ta có:

$$\widehat{ABK} = \widehat{CBD} \text{ (cách lấy)}$$

$$\widehat{BAK} = \widehat{BDC} \text{ (hai góc nội tiếp chắn cung } BC)$$

$$\Rightarrow \triangle ABK \sim \triangle DBC \text{ (g-g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AK}{CD} \Rightarrow AB \cdot CD = BD \cdot AK.$$

Xét tam giác CBK và tam giác DBA , ta có:

$$\widehat{CBK} = \widehat{CBA} - \widehat{ABK} = \widehat{CBA} - \widehat{CBD} = \widehat{ABD}$$

$$\widehat{BCK} = \widehat{BDA} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } AB)$$

$$\Rightarrow \triangle CBK \sim \triangle DBA \text{ (g-g)}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{CK}{AD} \Rightarrow BC \cdot AD = BD \cdot CK.$$

Từ đó ta có

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AK + BD \cdot CK = BD(AK + CK) = BD \cdot AC.$$

Áp dụng định lý Ptoleme vào tứ giác nội tiếp $BMAC$ ta có $BM \cdot AC + AM \cdot BC = AB \cdot MC$.

□

Câu 5. Cho 2013 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2013}$ và đường tròn $(O; 1)$ tùy ý cùng nằm trong mặt phẳng. Chứng minh trên đường tròn $(O; 1)$ đó, ta luôn có thể tìm được một điểm M sao cho $MA_1 + MA_2 + \dots + MA_{2013} \geq 2013$.

Lời giải.

Vẽ đường kính BC bất kì của đường tròn $(O; 1)$. Ta có

$$\begin{aligned} & (BA_1 + BA_2 + \dots + BA_{2013}) + (CA_1 + CA_2 + \dots + CA_{2013}) \\ &= (BA_1 + CA_1) + (BA_2 + CA_2) + \dots + (BA_{2013} + CA_{2013}) \\ &\geq 2013BC = 4026. \end{aligned}$$

$$\text{Nếu } \begin{cases} BA_1 + BA_2 + \dots + BA_{2013} < 2013 \\ CA_1 + CA_2 + \dots + CA_{2013} < 2013 \end{cases}$$

thì $(BA_1 + BA_2 + \cdots + BA_{2013}) + (CA_1 + CA_2 + \cdots + CA_{2013}) < 4026$ (vô lí).

$$\text{Suy ra } \begin{cases} BA_1 + BA_2 + \cdots + BA_{2013} \geq 2013 \\ CA_1 + CA_2 + \cdots + CA_{2013} \geq 2013. \end{cases}$$

- Nếu $BA_1 + BA_2 + \cdots + BA_{2013} \geq 2013$ thì B là điểm M cần tìm.
- Nếu $CA_1 + CA_2 + \cdots + CA_{2013} \geq 2013$ thì C là điểm M cần tìm.

□

—————HẾT—————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 6

ĐỀ THI HSG LỚP 9 - TP HÀ NỘI
NĂM HỌC 2013 - 2014

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1.

- a) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 2014$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2014}$. Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{1}{a^{2013}} + \frac{1}{b^{2013}} + \frac{1}{c^{2013}}$.
- b) Tìm số tự nhiên n để $T = 5^{2n^2-6n+2} - 12$ là số nguyên tố.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{1}{2014} = \frac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{c} \\ &\Leftrightarrow (a+b)(ac+bc+c^2) = -ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)(ac+bc+c^2+ab) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{cases} \end{aligned}$$

Xét trường hợp $a = -b$, các trường hợp còn lại tương tự.

$$\text{Ta có } a + b + c = 2014 \Leftrightarrow c = 2014 \Rightarrow M = \frac{1}{2014^{2013}}$$

$$\text{b) Ta có } 2n^2 - 6n + 2 = 2n(n-3) + 2$$

Do $n(n-3):2$ nên $2n^2 - 6n + 2$ có dạng $4k + 2$, với $k \in \mathbb{N}$.

$$T = 5^{2n^2-6n+2} - 12 = 5^{4k+2} - 12 = 625^k \cdot 25 - 12 \equiv 1^k \cdot 25 - 12 \pmod{13} \equiv 0 \pmod{13}.$$

$$\text{Vậy để } T \text{ là số nguyên tố thì } T = 13 \Leftrightarrow 5^{2n^2-6n+2} - 12 = 13 \Leftrightarrow \begin{cases} n=0 \\ n=3 \end{cases}.$$

□

Câu 2.

$$\text{a) Giải phương trình } x^2 - 2x - 2\sqrt{2x+1} - 2 = 0.$$

$$\text{b) Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4z - 5 + 2xy \\ x^4 + y^4 = 9z - 5 - 4z^2 - 2x^2y^2 \end{cases}.$$

Lời giải.

a) Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$.

$$\text{pt} \Leftrightarrow x^2 = (\sqrt{2x+1} + 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+1} + 1 = x \\ \sqrt{2x+1} + 1 = -x \end{cases}$$

$$\bullet \sqrt{2x+1} + 1 = x \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x+1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x=0 \Leftrightarrow x=4 \end{cases}$$

4

$$\bullet \sqrt{2x+1} + 1 = -x \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = -x-1, \text{ loại vì } -x-1 < 0, \forall x \geq -\frac{1}{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 4$.

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4z - 5 + 2xy(1) \\ x^4 + y^4 = 9z - 5 - 4z^2 - 2x^2y^2(2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x-y)^2 = 4z-5 \geq 0 \Rightarrow z \geq \frac{5}{4}.$$

$$(2) \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = -4z^2 + 9z - 5 = (4z-5)(1-z) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq z \leq \frac{5}{4}.$$

Vậy $z = \frac{5}{4}$ và suy ra $x = y$. Từ đó, ta có nghiệm của hệ là $(a, a, \frac{5}{4})$, với a là số thực bất kì.

□

Câu 3. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $0 \leq a \leq 4, 0 \leq b \leq 4, 0 \leq c \leq 4$ và $a+b+c = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$.

Lời giải.

a) **Cách 1:**

Giả sử $a \geq b \geq c$, suy ra $2 \leq a \leq 4 \Leftrightarrow (a-4)(a-2) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 8 \leq 0 \Leftrightarrow a(6-a) \geq 8$.

Ta có $P = (a+b+c)^2 - ab - bc - ca = 36 - ab - bc - ca = 36 - a(b+c) - bc \leq 36 - a(6-a) \leq 36 - 8 = 28$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 28 khi a, b, c là hoán vị của $(2, 4, 0)$.

b) **Cách 2:**

Do $0 \leq a, b, c \leq 4$ nên $(a-4)(b-4)(c-4) \leq 0 \Leftrightarrow abc - 4(ab+bc+ca) + 16(a+b+c) - 64 \leq 0$.

$\Leftrightarrow 4(ab+bc+ca) \geq abc + 16(a+b+c) - 64 \geq 0 + 16 \cdot 6 - 64 = 32 \Leftrightarrow ab+bc+ca \geq 8$.

Ta có $P = (a+b+c)^2 - (ab+bc+ca) \leq 36 - 8 = 28$.

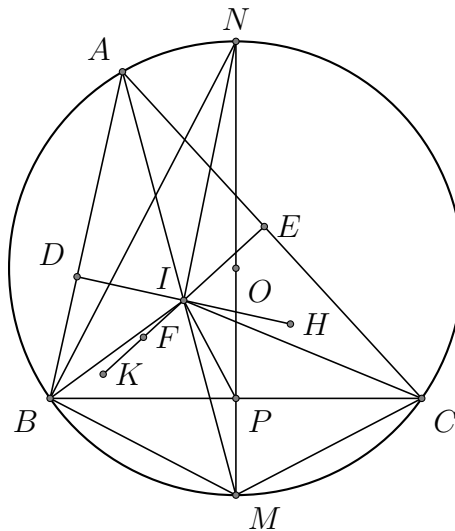
Vậy giá trị lớn nhất của P là 28 khi a, b, c là hoán vị của $(2, 4, 0)$.



Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , gọi điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , tia AI cắt đường tròn (O) tại điểm M (M khác A).

- a) Chứng minh rằng các tam giác IMB và IMC là tam giác cân.
- b) Đường thẳng MO cắt đường tròn tại điểm N (N khác M) và cắt cạnh BC tại điểm P . Chứng minh rằng $\sin \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{IP}{IN}$.
- c) Gọi các điểm D và E lần lượt là hình chiếu của điểm I trên các cạnh AB và AC . Gọi các điểm H, K lần lượt đối xứng với các điểm D và E qua điểm I . Biết rằng $AB + AC = 3BC$, chứng minh rằng các điểm B, C, H, K cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{IBM} = \widehat{IBC} + \widehat{CBM} = \frac{\widehat{ABC}}{2} + \frac{\widehat{BAC}}{2}$

$$\widehat{BIM} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \frac{\widehat{ABC}}{2} + \frac{\widehat{BAC}}{2}$$

Suy ra $\widehat{IBM} = \widehat{BIM} \Rightarrow \triangle IMB$ cân tại M .

Tương tự, $\triangle IMC$ cân tại M .

b) Ta có $\sin \frac{\widehat{BAC}}{2} = \sin \widehat{BCM} = \frac{MP}{MC} = \frac{MP}{MI}$ (1) (do $MP \perp BC$ và $MI = MC$)

$$\triangle MBN \text{ vuông tại } B, \text{ có } MP \cdot MN = MB^2 = MI^2 \Rightarrow \frac{MP}{MI} = \frac{MI}{MN} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \triangle MPI \sim \triangle MIN \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \frac{MI}{MN} = \frac{IP}{IN} \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\sin \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{IP}{IN}$.

c) Ta có $AB + AC = 3BC \Leftrightarrow \frac{AB + AC - BC}{2} = BC \Leftrightarrow AE = BC$

$$\triangle IAE \sim \triangle MCP \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MP}{IE} = \frac{CP}{AE} = \frac{1}{2} \Rightarrow IE = 2MP.$$

Gọi F là trung điểm của IK , $\triangle MCP = \triangle MIF$ (c.g.c) do $MC = MI$

$$\widehat{PMC} = \widehat{EIA} = \widehat{MIF}; MP = IF = \frac{1}{2}IE \Rightarrow \widehat{IFM} = \widehat{MPC} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle IMK$ cân tại $M \Rightarrow MK = MI$.

Tương tự, $MH = MI$. Suy ra $MB = MC = MH = MK = MI$. Vậy B, C, H, K cùng thuộc đường tròn tâm M .

□

Câu 5.

- a) Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn $5^x - 2^y = 1$.
- b) Cho lục giác đều $ABCDEF$ cạnh có độ dài bằng 1 và P là điểm nằm trong lục giác đó. Các tia AP, BP, CP, DP, EP, FP cắt các cạnh của lục giác này lần lượt tại các điểm $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ (các điểm này lần lượt khác các điểm A, B, C, D, E, F). Chứng minh lục giác $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ có ít nhất một cạnh có độ dài lớn hơn hoặc bằng 1.

Lời giải.

- a) Ta có $5^x - 2^y = 1 \Leftrightarrow 2^y = 5^x - 1$.

Với $x = 2k + 1, \forall k \in \mathbb{N}$ ta có $2^y = 4(5^{2k} + 5^{2k-1} + \dots + 5 + 1)$

- Nếu $y < 2$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $y = 2$ thì $x = 1$ (thỏa mãn).
- Nếu $y > 2$ thì phương trình vô nghiệm vì VT chia hết cho 8 còn VP thì không chia hết cho 8.

Với $x = 2k, \forall k \in \mathbb{N}$ ta có $2^y = (5^k - 1)(5^k + 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5^k - 1 = 2^a \\ 5^k + 1 = 2^b \end{cases} \text{ với } a, b \in \mathbb{N}; 0 \leq a < b; a + b = y. \Rightarrow 2^b - 2^a = 2^a(2^{b-a} - 1) = 2.$$

- Nếu $a \geq 2$ thì $2^a(2^{b-a} - 1):4$, vô lí.
- Nếu $a = 1; a = 0$ thì $5^k = 3; 5^k = 2$, vô lí.

Vậy $(x; y) = (1; 2)$.

b) Nhận xét: Trong nhiều trường hợp, $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ suy biến không còn là lục giác nên sau đây ta thống nhất gọi là đa giác $M_1 \dots M_6$.

- Gọi O là tâm của lục giác đều $ABCDEF$ (kí hiệu là $\mathcal{L}$). Nếu $P \equiv O$ thì đa giác $M_1 \dots M_6 \equiv \mathcal{L}$, ta có đpcm.
- Nếu P thuộc một trong ba đường chéo lớn của $\mathcal{L}$, $P \neq O$ thì P thuộc một trong sáu đoạn OA, OB, OC, OD, OE, OF . Giả sử $P \in OD$, khi đó hai tia AP, DP lần lượt đi qua đỉnh D, A của $\mathcal{L}$ và ta có $M_1 \equiv D, M_4 \equiv A$. Còn lại 4 tia, cắt nhiều nhất 4 cạnh của $\mathcal{L}$. Như vậy tồn tại ít nhất hai cạnh AB, AF của $\mathcal{L}$ không chứa các điểm $M_1, \dots, M_6$. Xét tam giác có một cạnh là AB và một cạnh là M_4M_i của đa giác $M_1 \dots M_6$ gần AB nhất ($M_4 \equiv A$), ta luôn có $\widehat{M_4BM_i} > 90^\circ \Rightarrow M_4M_i > AB = 1$.
- Nếu P không thuộc ba đường chéo lớn của $\mathcal{L}$ thì P nằm trong một trong sáu tam giác đều của $\mathcal{L}$ mà ba đường chéo lớn chia ra. Giả sử P nằm trong $\triangle ODE$. Như vậy, tồn tại ít nhất cạnh AB của $\mathcal{L}$ không chứa các điểm $M_1, \dots, M_6$. Khi đó M_4M_5 luôn là một cạnh của đa giác $M_1 \dots M_6$ và ABM_5M_4 là tứ giác luôn có $\widehat{ABM_5} > 90^\circ; \widehat{BAM_4} > 90^\circ \Rightarrow M_4M_5 > AB = 1$.

□

—————HẾT—————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 7

ĐỀ THI HSG LỚP 9 - TP HÀ NỘI
NĂM HỌC 2014-2015

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1.

- a) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $abc = 1$ và $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.
 Chứng minh có ít nhất một trong các số a, b, c bằng 1.
- b) Cho n là số nguyên dương. Chứng minh $A = 2^{3n+1} + 2^{3n-1} + 1$ là hợp số.

Lời giải.

- a) Từ giả thiết $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ta có $a + b + c = ab + bc + ca$

$$\Leftrightarrow ab + bc + ca - a - b - c = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + ab + bc + ca - a - b - c - abc = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - a) - b(1 - a) - c(1 - b) + ca(1 - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - a)(1 - b) - c(1 - b)(1 - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - a)(1 - b)(1 - c) = 0$$

Vậy có ít nhất 1 trong các số a, b, c bằng 1. (Đpcm).

- b) Ta có $2^{3n+1} = 2 \times 2^{3n} = 2 \times 8^n$.

Vì $8 \equiv 1 \pmod{7}$ nên $8^n \equiv 1^n \pmod{7}$ hay $2 \times 8^n \equiv 2 \pmod{7}$ (1)

Tương tự, phân tích $2^{3n-1} = 4 \times 2^{3n-3} = 4 \times 8^{n-1}$ ta có $4 \times 8^{n-1} \equiv 4 \pmod{7}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $A \equiv (2 + 4 + 1) \pmod{7}$, hay $A \equiv 7 \pmod{7}$.

Vì n là số nguyên dương, $A \geq 21$. Vậy A là hợp số. (Đpcm).

□

Câu 2.

- a) Giải phương trình $x\sqrt{3-2x} = 3x^2 - 6x + 4$.

- b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \\ x^2 + 8y^2 = 12 \end{cases}$$
.

Lời giải.a) Điều kiện: $x \leq \frac{3}{2}$.

$$3x^2 - 6x + 4 - x\sqrt{3-2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} [x^2 - 2x\sqrt{3-2x} + (3-2x)] + \frac{5}{2}x^2 - 5x + \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (x - \sqrt{3-2x})^2 + \frac{5}{2} (x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-\sqrt{3-2x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

b) Thay $x^2 + 8y^2 = 12$ vào phương trình đầu ta có

$$x^3 + 2xy^2 + (x^2 + 8y^2)y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2y + 2xy^2 + 8y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2y)(x^2 - xy + 4y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2y) \left[\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{15y^2}{4} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{15y^2}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ x = y = 0 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $x = -2y$, thay vào phương trình thứ 2 của hệ ta được $y = \pm 1$.Trường hợp 2: $x = y = 0$, không thỏa mãn phương trình thứ 2 của hệ.Kết luận: Hệ có hai nghiệm là $(2, -1); (-2, 1)$.

□

Câu 3. Với các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 - ca + a^2}}$.

Lời giải.Vì a, b, c là ba số dương nên theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{\sqrt{bc}}$$

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \geq \frac{2}{\sqrt{ca}}$$

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế ta được:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \quad (1).$$

Mặt khác ta có:

$$a^2 - ab + b^2 \geq ab \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

$$b^2 - bc + c^2 \geq bc \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{bc}}$$

$$c^2 - ca + a^2 \geq ca \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{c^2 - ca + a^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{ca}}$$

Nên sau khi cộng các bất đẳng thức cùng chiều trên, ta được:

$$P = \frac{1}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 - ca + a^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$P \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi (1) và (2) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Vậy Giá trị lớn nhất của P bằng 3, đạt được khi $a = b = c = 1$.

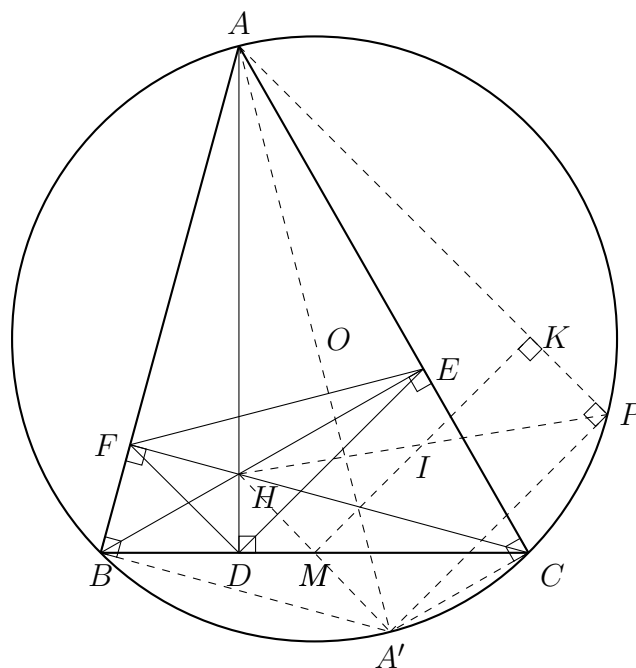
□

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O . Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H .

a) Chứng minh $\cos^2 \widehat{BAC} + \cos^2 \widehat{CBA} + \cos^2 \widehat{ACB} < 1$.

b) P là điểm thuộc cung nhỏ AC của đường tròn tâm O . Gọi M, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC và HP . Chứng minh MI vuông góc với AP .

Lời giải.



a) Vì tam giác BEA vuông tại E nên ta có $\cos^2 \widehat{BAC} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 \quad (1).$

Dễ thấy tứ giác $BFEC$ là tứ giác nội tiếp vì E, F cùng nhìn BC dưới 1 góc vuông.

Vì vậy $\widehat{ABC} = \widehat{AEF} = 180^\circ - \widehat{FEC}$ (2).

Xét hai tam giác ABC và AEF có:

$\widehat{A}$ chung.

$\widehat{ABC} = \widehat{AEF}$ (theo (2)).

Do đó tam giác ABC đồng dạng với tam giác AEF . Bình phương tỉ số đồng dạng bằng tỉ số diện tích nên ta có:

$$\left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ABC}} \quad (3).$$

Từ (1) và (3) suy ra $\cos^2 \widehat{BAC} = \frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ABC}}$ (4).

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được:

$$\cos^2 \widehat{CBA} = \frac{S_{\Delta BFD}}{S_{\Delta ABC}} \quad (5).$$

$$\cos^2 \widehat{ACB} = \frac{S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta ABC}} \quad (6).$$

Từ (4), (5), (6) ta có

$$\cos^2 \widehat{BAC} + \cos^2 \widehat{CBA} + \cos^2 \widehat{ACB} = \frac{S_{\Delta AEF} + S_{\Delta BFD} + S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta ABC} - S_{\Delta DEF}}{S_{\Delta ABC}} <$$

1 (đpcm).

b) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O hay AA' là đường kính.

Xét tứ giác $BHCA'$ có:

$BH \parallel A'C$ (Vì cùng vuông góc với AC)

$CH \parallel A'B$ (Vì cùng vuông góc với AB)

Vậy tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành. Suy ra M là trung điểm của HA' .

Xét tam giác HPA' có:

M là trung điểm của HA' theo chứng minh trên

I là trung điểm của HP theo giả thiết

Vậy MI là đường trung bình trong tam giác HPA' . Suy ra $MI \parallel A'P$.

Dễ thấy $A'P$ vuông góc với AP vì AA' là đường kính.

Vậy MI vuông góc với AP . (Đpcm).

□

Câu 5.

a) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $\frac{p^2 - p - 2}{2}$ là lập phương của một số tự nhiên.

b) Cho 5 số thực không âm a, b, c, d, e có tổng bằng 1. Xếp 5 số này trên một đường tròn. Chứng minh rằng luôn tồn tại một cách xếp sao cho hai số bất kỳ cạnh nhau có tích không lớn hơn $\frac{1}{9}$.

Lời giải.

a) Xét $p = 2$, lúc này ta có $\frac{p^2 - p - 2}{2} = 0 = 0^3$. Vậy $p=2$ thỏa mãn.

Trường hợp p nguyên tố, $p > 2$: Từ giả thiết ta có

$$p^2 - p - 2 = n^3 \Leftrightarrow p(p-1) = 2(n+1)(n^2 - n + 1)(1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p | (n+1) \\ p | (n^2 - n + 1) \end{cases}$$

Xét các khả năng sau:

- Nếu p là ước của $n+1$.

$$\Rightarrow p \leq (n+1)$$

$$\Rightarrow p-1 \leq n$$

$$\Rightarrow p(p-1) \leq n(n+1)$$

$$\Rightarrow 2(n+1)(n^2 - n + 1) \leq n(n+1)$$

$$\Rightarrow n^2 - 2n + 2 \leq 0 \text{ Vô lý.}$$

- Nếu p là ước của $(n^2 - n + 1)$.

Đặt $pk = n^2 - n + 1, k \in \mathbb{N}^* (2)$. Thay trở lại (1) ta có

$$p(p-1) = 2(n+1)pk$$

$$\Rightarrow p = 2(n+1)k + 1 (3)$$

Thay (3) vào (2) ta có:

$$n^2 - (2k^2 + 1)n + 1 - 2k^2 - k = 0 (4)$$

$$\Delta = 4k^4 + 12k^2 + 4k - 3.$$

Ta cần tìm k sao cho Δ là số chính phương. Nhận thấy: $(2k^2+2)^2 < \Delta < (2k^2+4)^2$.

Suy ra $\Delta = (2k^2 + 3)^2$. Từ đây ta có:

$$4k^4 + 12k^2 + 4k - 3 = (2k^2 + 3)^2 \Rightarrow k = 3.$$

Thay trở lại tìm n từ phương trình (4) và p từ (3) ta được: $p = 127$.

Vậy $p = 2$ hoặc $p = 127$.

b) Không mất tính tổng quát, giả sử có sắp xếp $a \geq b \geq c \geq d \geq e$. Khi đó lấy a làm chuẩn và xếp theo chiều kim đồng hồ như sau:

$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e$. Cách xếp này thỏa mãn yêu cầu vì:

$$+, ad \leq \frac{1}{3}a(b+c+d) \leq \frac{1}{12}(a+b+c+d)^2 = \frac{1}{12} < \frac{1}{9}.$$

$$+, bd \leq ad < \frac{1}{9}.$$

$$+, ce \leq ac \leq ad < \frac{1}{9}$$

$$+, bc \leq \frac{1}{4}(b+c)^2 \leq \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3}(a+b+c+d) \right)^2 = \frac{1}{9}.$$

□

HẾT

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 8

ĐỀ THI HSG LỚP 9 - TP HÀ NỘI
NĂM HỌC 2016 - 2017

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1.

- a) Chứng minh $n^5 + 5n^3 - 6n$ chia hết cho 30, với mọi số nguyên dương n .
- b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $x^2 + 8y$ và $y^2 + 8x$ là các số chính phương.

Lời giải.

- a) Ta có

$$x = n^5 + 5n^3 - 6n = n(n^4 + 5n^2 - 6) = n(n-1)(n+1)(n^2+6).$$

Do $n, n-1, n+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên $n(n-1)(n+1) \vdots 6$, suy ra $x \vdots 6$.

Nếu $n \equiv 0 \pmod{5}$ hoặc $n \equiv \pm 1 \pmod{5}$ thì $n(n-1)(n+1) \equiv 0 \pmod{5}$ nên $x \vdots 5$.

Nếu $n \equiv \pm 2 \pmod{5}$ thì $n^2 + 6 \equiv 10 \equiv 0 \pmod{5}$ nên $x \vdots 5$. Do đó ta có $x \vdots 5$ với mọi n .

Từ đó ta suy ra được $x \vdots 30$ với mọi số nguyên dương n .

- b) Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x \geq y$. Khi đó

$$x^2 < x^2 + 8y \leq x^2 + 8x < x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2.$$

Mà $x^2 + 8y$ là số chính phương nên ta có các trường hợp sau

- $x^2 + 8y = (x+1)^2 \Leftrightarrow 8y = 2x+1$ (loại).
- $x^2 + 8y = (x+2)^2 \Leftrightarrow 2y = x+1$, khi đó

$$y^2 + 8x = y^2 + 16y - 8 = (y+8)^2 - 72 = a^2 \Leftrightarrow (y+8-a)(y+8+a) = 72 = 3^2 \cdot 2^3.$$

Do $y+8+a > y+8-a$ và hai số đó cùng tính chẵn lẻ, nên ta có

$$\begin{cases} y + a + 8 = 2.3^2 \\ y + 8 - a = 2^2 \end{cases} \Rightarrow y = 3, x = 5. \text{ hoặc } \begin{cases} y + a + 8 = 2^2.3^2 \\ y + 8 - a = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 11, x = 21.$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} y + a + 8 = 2^2.3 \\ y + 8 - a = 2.3 \end{cases} \Rightarrow y = 1, x = 1.$$

$$\bullet x^2 + 8y = (x + 3)^2 \Leftrightarrow 8y = 6x + 9 \text{ (loại)}.$$

Vậy các cặp $(x; y)$ cần tìm là: $(1; 1)$, $(3; 5)$, $(5; 3)$, $(11; 21)$, $(21; 11)$.

□

Câu 2.

a) Giải phương trình $\sqrt{2x - \frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{6}{x} - 2x} = 1 + \frac{3}{2x}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\frac{4x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} \\ \sqrt{\frac{5y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} \end{cases}$.

Lời giải.

a) Đặt $a = \sqrt{2x - \frac{3}{x}}$, $b = \sqrt{\frac{6}{x} - 2x}$, ta có $a, b \geq 0$ và $a^2 + b^2 = \frac{3}{x}$. Do đó, ta có

$$\begin{aligned} a + b &= 1 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq 1 + \frac{1}{4}(a + b)^2 \\ \Rightarrow (a + b - 2)^2 &\leq 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b - 2 = 0 \\ a = b \end{cases} \Rightarrow a = b = 1. \end{aligned}$$

Từ đây ta có $\frac{3}{x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Ta thấy $x = \frac{3}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có

$$\begin{cases} \sqrt{2x - \frac{3}{x}} \leq \frac{1 + 2x - \frac{3}{x}}{2} \\ \sqrt{\frac{6}{x} - 2x} \leq \frac{1 + \frac{6}{x} - 2x}{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2x - \frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{6}{x} - 2x} \leq 1 + \frac{3}{2x}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{3}{2}$.

b) Điều kiện $\begin{cases} xy > 0 \\ x - y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$.

Cộng và trừ theo vế hai phương trình của hệ ta có

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{4x}{5y}} + \sqrt{\frac{5y}{x}} = 2\sqrt{x+y} \\ -\sqrt{\frac{4x}{5y}} + \sqrt{\frac{5y}{x}} = 2\sqrt{x-y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4x}{5y} + 4 + \frac{5y}{x} = 4(x+y) \\ \frac{4x}{5y} - 4 + \frac{5y}{x} = 4(x-y) \end{cases},$$

suy ra $8 = 8y \Rightarrow y = 1$. Thay vào hệ ta có

$$\frac{4x}{5} + \frac{5}{x} = 4x \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \text{ (do } y > 0 \text{ nên } x > 0).$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = \left(\frac{5}{4}; 1\right)$.

□

Câu 3. Với các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

a) Chứng minh $x + y + z \leq 2 + xy$

b) Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $P = \frac{x}{2+yz} + \frac{y}{2+xz} + \frac{z}{2+xy}$.

Lời giải.

a) Áp dụng bất đẳng thức $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ ta có

$$x+y+z \leq \sqrt{2[(x+y)^2 + z^2]} = \sqrt{2(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy)} = 2\sqrt{1+xy} \leq 1+(1+xy) = 2+xy.$$

b) Theo chứng minh trên ta có $2 + xy \geq x + y + z$ nên $\frac{z}{2+xy} \leq \frac{z}{x+y+z}$.

$$\text{Tương tự } \frac{x}{2+yz} \leq \frac{x}{x+y+z}, \quad \frac{y}{2+xz} \leq \frac{y}{x+y+z}.$$

Suy ra $P \leq 1$. Đẳng thức xảy ra khi trong ba số x, y, z có hai số bằng 1 và một số bằng 0. Do đó $\max P = 1$.

Ta có

$$2 + yz \leq 2 + \frac{y^2 + z^2}{2} = \frac{6 - x^2}{2},$$

do đó với $x \neq 0$, ta có

$$\frac{x}{2+yz} \geq \frac{2x}{6-x^2} = \frac{2x^2}{x(6-x^2)} = \frac{2\sqrt{2}x^2}{\sqrt{2x^2(6-x^2)(6-x^2)}}.$$

Mà

$$2x^2(6-x^2)(6-x^2) \leq \left(\frac{2x^2 + 6 - x^2 + 6 - x^2}{3}\right)^3 = 4^3,$$

nên

$$\frac{x}{2+yz} \geq \frac{\sqrt{2}x^2}{4}. \quad (1)$$

Và ta thấy (1) cũng đúng khi $x = 0$, do đó (1) đúng với mọi $x \geq 0$. Tương tự ta cũng có

$$\frac{y}{2+zx} \geq \frac{\sqrt{2}y^2}{4}, \quad \frac{z}{2+xy} \geq \frac{\sqrt{2}z^2}{4}.$$

Do đó $P \geq \frac{\sqrt{2}}{4} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

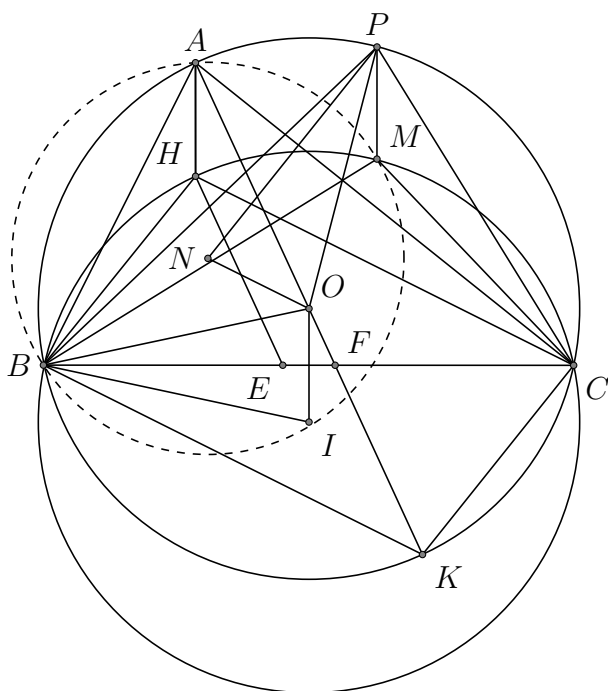
Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $x = y = 0, z = \sqrt{2}$. Vậy $\min P = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

□

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC ($BC > CA > AB$) nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC cắt tia phân giác góc $\widehat{ABC}$ tại điểm thứ hai M . Gọi P là trực tâm tam giác BCM .

- Chứng minh bốn điểm A, B, C, P cùng thuộc một đường tròn
- Đường thẳng HO song song với AO cắt cạnh BC tại E . Gọi F là điểm trên cạnh BC sao cho $CF = BE$. Chứng minh ba điểm A, F, O thẳng hàng
- Gọi N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM . Chứng minh rằng $PN = PO$.

Lời giải.



- a) Ta có P, H là trực tâm các tam giác BHC và ABC nên ta có

$$\widehat{BPC} = 180^\circ - \widehat{BMC} = 180^\circ - \widehat{BHC} = \widehat{BAC},$$

suy ra tứ giác $BAPC$ nội tiếp.

- b) Kẻ đường kính AK , ta có $BKCH$ là hình bình hành.

Xét hai tam giác BHE và CKF có

$$BH = CK, BE = CF \text{ và } \widehat{FCK} = \widehat{EBH}$$

nên $\triangle BHE = \triangle CKF$, suy ra $\widehat{BEH} = \widehat{CFK}$. Dẫn tới $HE \parallel KF$

Mặt khác $HE \parallel AK$ nên ta có A, K, F thẳng hàng. Bài toán được chứng minh.

- c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC . Vì $\triangle BHC = \triangle BKC$ nên $IB = IC = OB = OC$.

Ta có ON là đường trung trực cạnh AB , OI là đường trung trực cạnh BC và IN là đường trung trực cạnh BM , nên $\widehat{ONI} = \widehat{ABM}$ và $\widehat{OIN} = \widehat{MBC}$.

Mặt khác $\widehat{ABM} = \widehat{MCB} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ nên $\widehat{ONI} = \widehat{OIN} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$. Suy ra $\triangle ONI$ cân tại O và $\widehat{NOI} = 180^\circ - \widehat{ABC}$. Lại có

$$\widehat{POB} = 2\widehat{PCB} = 2(90^\circ - \widehat{MBC}) = 180^\circ - 2\widehat{MBC} = 180^\circ - \widehat{ABC}.$$

Nên ta có $\widehat{NOI} = \widehat{POB}$, suy ra $\widehat{NOP} = \widehat{IOB}$.

Từ đó dẫn đến $\triangle OBI = \triangle OPN$, mà $\triangle OBI$ cân tại B nên $PN = PO$.

□

Câu 5. Trên bàn có 100 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 100. Hai người A và B lần lượt mỗi người lấy một tấm thẻ trên bàn sao cho nếu người A lấy tấm thẻ đánh số n thì đảm bảo người B chọn được tấm thẻ đánh số $2n + 2$. Hỏi người A có thể lấy được nhiều nhất bao nhiêu tấm thẻ trên bàn thỏa mãn yêu cầu trên?

Lời giải.

Vì B bốc thẻ $2n + 2$ nên $2n + 2 \leq 100$. Suy ra $n \leq 49$. Do đó, A chỉ được bốc các thẻ đánh từ 1 đến 49.

Bây giờ, ta chia tập $\{1; 2; \dots; 49\}$ thành 33 tập con như sau:

$\{1; 4\}, \{3; 8\}, \{5; 12\}; \dots, \{23; 49\}$ (12 nhóm);

$\{2; 6\}, \{10; 22\}, \{14; 30\}, \{18; 38\}$ (4 nhóm);

$\{25\}, \{27\}, \{29\}, \dots, \{49\}$ (13 nhóm);

$\{26\}$, $\{32\}$, $\{42\}$, $\{46\}$ (4 nhóm).

Ở mỗi nhóm, A được chọn tối đa một số. Nếu A chọn nhiều hơn 34 số trong các số từ 1 đến 49 thì theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai số thuộc cùng một nhóm (vô lý). Do đó, A được chọn không quá 33 số.

Mặt khác, A có thể chọn 33 số sau :

$$\{1, 3, 5, \dots, 23, 2, 10, 14, 18, 25, 27, 29, \dots, 49, 26, 32, 42, 46\}$$

thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vậy người A có thể lấy nhiều nhất 33 tấm thẻ trên bàn thỏa mãn yêu cầu trên.

□

—————HẾT—————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 9

ĐỀ THI HSG LỚP 9 - QUẬN HOÀN
KIỂM - TP HÀ NỘI NĂM 2018

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1.

- a) Tìm ba số nguyên tố sao cho tích của chúng gấp 5 lần tổng của chúng.
 b) Tìm bộ số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn đẳng thức $1 + \sqrt{x + y + 3} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Lời giải.

a) Gọi ba số cần tìm là a, b, c . Theo đề ta có $abc = 5(a + b + c)$.

Dễ thấy $abc : 5$ nên trong ba số a, b, c có ít nhất một số chia hết cho 5.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a : 5$. Vì a nguyên tố nên $a = 5$, từ đó

$$5bc = 5(5 + b + c) \Leftrightarrow (b - 1)(c - 1) = 6.$$

Kết hợp với điều kiện b, c nguyên tố ta thu được $b = 2, c = 7$ hoặc $b = 7, c = 2$.

Vậy có 6 bộ số $(a; b; c)$ thỏa mãn yêu cầu là $(5; 2; 7)$ và các hoán vị.

b) Từ giả thiết suy ra $\sqrt{x + y + 3} = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 1$. Bình phương hai vế và thu gọn ta có

$$\sqrt{xy} - \sqrt{x} - \sqrt{y} - 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{y} - 1) = 2 \quad (*)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y$.

- Xét $y \geq 6$ thì $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{y} - 1) \geq (\sqrt{6} - 1)^2 > 2$ (mâu thuẫn).
- Xét $0 \leq y < 6$, vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Thay vào $(*)$ tìm được $x = 9, y = 4$.

Vậy có 2 bộ số $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu là $(9; 4)$ và $(4; 9)$. □

Câu 2.

- a) Giải phương trình $x^2 + 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3x + 1$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 6y + 2 = \frac{x}{y} - \sqrt{x - 2y} \\ \sqrt{x + \sqrt{x - 2y}} = x + 3y - 2 \end{cases}.$$

Lời giải.

a) Điều kiện: $x - \frac{1}{x} \geq 0$.

Do $x \neq 0$ nên chia hai vế của phương trình cho x ta thu được

$$x - \frac{1}{x} + 2\sqrt{x - \frac{1}{x}} - 3 = 0.$$

Tìm được $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 1$ hoặc $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = -3$ (loại).

Từ $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 1$ ta tìm được $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

b) Điều kiện
$$\begin{cases} y \neq 0 \\ x - 2y \geq 0 \\ x + \sqrt{x - 2y} \geq 0 \end{cases}.$$

Quy đồng mẫu số phương trình đầu của hệ ta thu được

$$x - 2y - y\sqrt{x - 2y} - 6y^2 = 0.$$

Từ đó suy ra được $\sqrt{x - 2y} = -2y$ hoặc $\sqrt{x - 2y} = 3y$.

Trường hợp 1. Xét $\sqrt{x - 2y} = -2y$. Thay vào phương trình sau ta có

$$\sqrt{x - 2y} = x + 3y - 2 \Rightarrow -2y = x + 3y - 2 \Leftrightarrow x = 2 - 5y.$$

Do đó, $\sqrt{x - 2y} = -2y \Leftrightarrow \sqrt{2 - 7y} = -2y \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 0 \\ 2 - 7y = 4y^2 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2 \Rightarrow x = 12.$

Trường hợp 2. Xét $\sqrt{x - 2y} = 3y$. Thay vào phương trình sau ta có

$$\sqrt{x + 3y} = x + 3y - 2 \Leftrightarrow \sqrt{x + 3y} = -1 \text{ (loại) hoặc } \sqrt{x + 3y} = 2 \Leftrightarrow x = 4 - 3y.$$

Do đó, $\sqrt{x - 2y} = 3y \Leftrightarrow \sqrt{4 - 5y} = 3y \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 4 - 5y = 9y^2 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{4}{9} \Rightarrow x = \frac{8}{3}.$

Thử lại ta có các nghiệm của hệ là $(12; -2)$ và $(\frac{8}{3}; \frac{4}{9})$. □

Câu 3. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

a) Chứng minh $xy^2 + yz^2 + zx^2 \leq 2 + xyz$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{2+y} + \frac{y}{2+z} + \frac{z}{2+x}$.

Lời giải.

a) Không mất tính tổng quát, giả sử $x \leq y \leq z$. Khi đó,

$$\begin{aligned} x(y-z)(y-x) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow xy^2 + zx^2 &\leq x^2y + xyz \\ \Leftrightarrow xy^2 + yz^2 + zx^2 &\leq y(x^2 + z^2) + xyz = y(3 - y^2) + xyz. \end{aligned}$$

Xét hiệu $2 - y(3 - y^2) = y^3 - 3y + 2 = (y - 1)^2(y + 2) \geq 0$.

Suy ra $y(3 - y^2) \leq 2 \Rightarrow xy^2 + yz^2 + zx^2 \leq 2 + xyz$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $(x; y; z) = (1; 1; 1)$ hoặc $(0; 1; \sqrt{2})$ và các hoán vị của chúng.

b) Nhận xét: Biến đổi $P \leq 1 \Leftrightarrow xy^2 + yz^2 + zx^2 \leq 2 + xyz$.

Từ đó tìm được $P_{\max} = 1 \Leftrightarrow (x; y; z) = (1; 1; 1)$ hoặc $(0; 1; \sqrt{2})$ và các hoán vị của chúng.

Ta có $P = \frac{x^2}{2x + xy} + \frac{y^2}{2y + yz} + \frac{z^2}{2z + zx} \geq \frac{(x + y + z)^2}{2(x + y + z) + xy + yz + zx} = Q$
(bất đẳng thức Cauchy-Schwarz).

Đặt $t = x + y + z$ thì $xy + yz + zx = \frac{t^2 - 3}{2}$ với $\sqrt{3} \leq t \leq 3$.

Khi đó, $Q = \frac{2t^2}{t^2 + 4t - 3}$ với $\sqrt{3} \leq t \leq 3$.

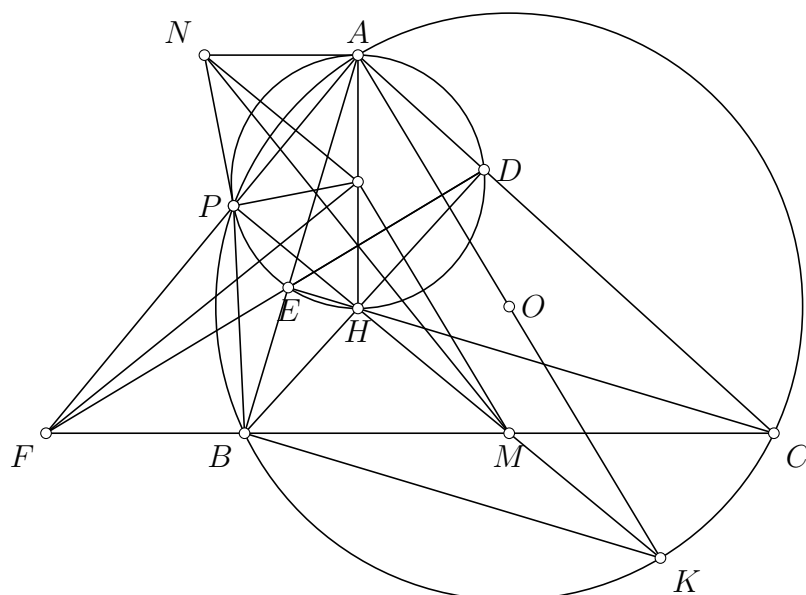
Ta có $Q \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{2t^2}{t^2 + 4t - 3} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (t - \sqrt{3})[(4 - \sqrt{3})t - 3] \geq 0$ (luôn đúng với $t \geq \sqrt{3}$).

Từ đó tìm được $P_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (x; y; z) = (\sqrt{3}; 0; 0)$ và các hoán vị của nó. $\square$

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao BD, CE cắt nhau tại H . Đường tròn tâm I đường kính AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai P .

- Chứng minh hai tam giác PBC và PED đồng dạng.
- Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh ba điểm P, H, M thẳng hàng.
- Các tiếp tuyến tại A và P của đường tròn (I) cắt nhau tại N . Chứng minh rằng các đường thẳng MN, DE, AH đồng quy.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{PCB} = \widehat{PAB} = \widehat{PDE}$ và $\widehat{PBC} = 180^\circ - \widehat{PAC} = \widehat{PED}$.

Do đó $\triangle PBC \sim \triangle PED$ (g-g).

b) Kẻ đường kính AK , ta có $\widehat{APK} = 90^\circ$, chú ý $\widehat{APH} = 90^\circ$ từ đó ba điểm P, H, K thẳng hàng.

Mặt khác, $BH \parallel KC$, $CH \parallel KB$ nên $BHCK$ là hình bình hành.

Từ đó H, M, K thẳng hàng. Suy ra P, H, M thẳng hàng.

c) Gọi F là giao điểm của AP và BC , ta có $\widehat{AEP} = \widehat{AHP} = \widehat{BFP}$, từ đó $BEPF$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{FEP} = \widehat{FBP} = \widehat{PAC}$.

Suy ra $\widehat{FEP} + \widehat{DEP} = \widehat{PAC} + \widehat{DEP} = 180^\circ$ từ đó ba điểm D, E, F thẳng hàng, chú ý rằng IM là trung trực của DE , do đó $DE \perp IM$.

Ta có $\widehat{NIP} = \widehat{AHP} = \widehat{MFP}$, từ đó $\triangle PNI \sim \triangle PMF$ (g-g) (*)

Từ (*) dễ dàng suy ra $\triangle IPF \sim \triangle NPM$ (c-g-c), suy ra $\widehat{PIF} = \widehat{PNM} \Rightarrow FI \perp MN$.

Chú ý $AH \perp FM$, từ đó MN, DE, AH là ba đường cao của $\triangle IMF$ nên chúng đồng quy.

□

Câu 5. Một số số nguyên dương được viết trên một bảng đen. Tổng của hai số bất kì trong chúng là lũy thừa của 2. Hỏi trên bảng có thể có nhiều nhất bao nhiêu số phân biệt?

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh rằng số các số nguyên dương phân biệt không thể lớn hơn 2.

Thật vậy, giả sử có ba số $a < b < c$ trên bảng (trường hợp 4 số trở lên vẫn trích ra được bộ ba số như thế).

Dễ thấy theo đề bài, $a + b; b + c; c + a$ là ba lũy thừa phân biệt của 2.

Mặt khác, $a + b < a + c < b + c$ suy ra $b + c \geq 2(a + c)$ hay $b \geq 2a + c$ (vô lí).

Từ đó suy ra có nhiều nhất hai số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ta có thể lấy một trường hợp cụ thể là 1 và 3. □

—————HẾT—————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 10

ĐỀ THI TOÁN 9 HSG NĂM HỌC
2011, TP. ĐÀ NẴNG

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1. Cho biểu thức: $M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$.

a) Chứng minh rằng $M > 4$.

b) Với những giá trị nào của a thì biểu thức $N = \frac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên?

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) Do } a > 0, a \neq 1 \text{ nên: } \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} &= \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} = \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} \\ \text{và } \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}} &= \frac{(a+1)(a-1)-\sqrt{a}(a-1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{(a-1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{-a+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} \\ \Rightarrow M &= \frac{a+1}{\sqrt{a}} + 2 \end{aligned}$$

b) Ta có $0 < N = \frac{6}{M} < \frac{3}{2}$ do đó N chỉ có thể nhận được một giá trị nguyên là 1

$$\text{Mà } N = 1 \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{a}}{a+1+2\sqrt{a}} = 1 \Leftrightarrow a-4\sqrt{a}+1=0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-2)^2=3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a}=2+\sqrt{3} \text{ hay } \sqrt{a}=2-\sqrt{3} \text{ (phù hợp)}$$

$$\text{Vậy, } N \text{ nguyên} \Leftrightarrow a = (2 \pm \sqrt{3})^2$$

□

Câu 2.

a) Cho các hàm số bậc nhất: $y = 0,5x + 3$, $y = 6 - x$ và $y = mx$ có đồ thị lần lượt là các đường thẳng (d_1) , (d_2) và (Δ_m) . Với những giá trị nào của tham số m thì đường thẳng (Δ_m) cắt hai đường thẳng (d_1) và (d_2) lần lượt tại hai điểm A và B sao cho điểm A có hoành độ âm còn điểm B có hoành độ dương?

b) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho M và N là hai điểm phân biệt, di động lần lượt trên trục hoành và trên trục tung sao cho đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định $I(1;2)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa hoành độ của M và tung độ của N ; từ đó, suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}$.

Lời giải.

- a) Điều kiện để
- (Δ_m)
- là đồ thị hàm số bậc nhất là
- $m \neq 0$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (Δ_m) là:

$$0,5x + 3 = mx \Leftrightarrow (m - 0,5)x = 3$$

Điều kiện để phương trình này có nghiệm âm là $m - 0,5 < 0$ hay $m < 0,5$ Phương trình hoành độ giao điểm của (d_2) và (Δ_m) là:

$$6 - x = mx \Leftrightarrow (m + 1)x = 6$$

Điều kiện để phương trình này có nghiệm dương là $m + 1 > 0$ hay $m > -1$ Vậy điều kiện cần tìm là: $-1 < m < 0,5; m \neq 0$

- b) Đặt
- $m = x_M$
- và
- $n = y_N \Rightarrow m.n \neq 0$
- và
- $m \neq 1$
- (*)

Nên đường thẳng qua ba điểm M, I, N có dạng: $y = ax + b$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = am + b \\ 2 = a + b \\ n = b \end{cases} \Rightarrow \text{hệ thức liên hệ giữa } m \text{ và } n \text{ là } 2m + n = mn$$

Chia hai vế cho $m.n \neq 0$ ta được: $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = 1$ (**)

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n}\right)^2 = \frac{1}{m^2} + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{mn} = 5\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right) - \left(\frac{2}{m} - \frac{1}{n}\right)^2$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{5};$$

dấu “=” xảy ra khi $\frac{2}{m} = \frac{1}{n}$; kết hợp (**): $m = 5, n = 2,5$ (thỏa (*))Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{1}{5}$

□

Câu 3.

- a) Giải hệ phương trình:
- $$\begin{cases} 17x + 2y = 2011|xy| \\ x - 2y = 3xy \end{cases}$$

- b) Tìm tất cả các giá trị của
- x, y, z
- sao cho:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y-z} + \sqrt{z-x} = \frac{1}{2}(y+3).$$

Lời giải.

- a) Nếu
- $xy > 0$
- thì khi đó hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \frac{17}{y} + \frac{2}{x} = 2011 \\ \frac{1}{y} - \frac{2}{x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} = \frac{1007}{9} \\ \frac{1}{x} = \frac{490}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{490} \\ y = \frac{9}{1007} \end{cases} \text{ (phù hợp)}$$

Nếu $xy < 0$ thì khi đó hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \frac{17}{y} + \frac{2}{x} = -2011 \\ \frac{1}{y} - \frac{2}{x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} = \frac{-1004}{9} \\ \frac{1}{x} = -\frac{1031}{18} \end{cases} \Rightarrow xy > 0 \text{ (loại)}$$

Nếu $xy = 0$ thì khi đó hệ đã cho tương đương với $x = y = 0$ (nhận).

Vậy hệ có đúng 2 nghiệm là $(0; 0)$ và $\left(\frac{9}{490}; \frac{9}{1007}\right)$

b) Điều kiện $x \geq 0; y - z \geq 0; z - x \geq 0 \Leftrightarrow y \geq z \geq x \geq 0$

Theo BDT Cauchy: $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}; \sqrt{y-z} \leq \frac{y-z+1}{2}; \sqrt{z-x} \leq \frac{z-x+1}{2}$

$$\Rightarrow VP = \sqrt{x} + \sqrt{y-z} + \sqrt{z-x} \leq \frac{1}{2}(y+3) = VT$$

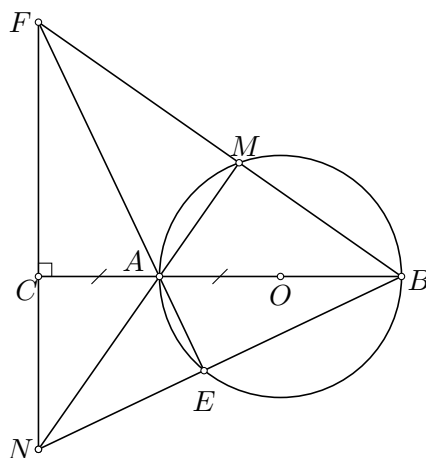
$$\text{Do đó } \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{y-z} = 1 \\ \sqrt{z-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \text{ thỏa điều kiện} \\ z = 2 \end{cases}$$

□

Câu 4. Cho đường tròn (C) với tâm O và đường kính AB cố định. Gọi M là điểm di động trên (C) sao cho M không trùng với các điểm A và B . Lấy C là điểm đối xứng của O qua A . Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt đường thẳng AM tại N . Đường thẳng BN cắt đường tròn (C) tại điểm thứ hai là E . Các đường thẳng BM và CN cắt nhau tại F .

- Chứng minh rằng các điểm A, E, F thẳng hàng.
- Chứng minh rằng tích $AM \cdot AN$ không đổi.
- Chứng minh rằng A là trọng tâm của tam giác BNF khi và chỉ khi NF ngắn nhất

Lời giải.



a) $MN \perp BF$ và $BC \perp NF$.

$\Rightarrow A$ là trực tâm của tam giác BNF .

$\Rightarrow FA \perp NB$.

Lại có $AE \perp NB$.

Nên A, E, F thẳng hàng.

b) $\widehat{CAN} = \widehat{MAB}$, nên hai tam giác ACN và AMB đồng dạng.

$$\text{Suy ra: } \frac{AN}{AB} = \frac{AC}{AM}$$

Hay $AM \cdot AN = AB \cdot AC = 2R^2$ không đổi (với R là bán kính đường tròn (C)).

c) Ta có $BA = \frac{2}{3}BC$ nên A là trọng tâm tam giác $BNF \Leftrightarrow C$ là trung điểm NF . (1)

Mặt khác: $\widehat{CAN} = \widehat{CFM}$, nên hai tam giác CNA và CBF đồng dạng.

$$\Rightarrow \frac{CN}{BC} = \frac{AC}{CF} \Rightarrow CN \cdot CF = BC \cdot AC = 3R^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $NF = CN + CF \geq 2\sqrt{CN \cdot CF} = 2R\sqrt{3}$ không đổi.

Nên: NF ngắn nhất $\Leftrightarrow CN = CF \Leftrightarrow C$ là trung điểm NF . (2)

Từ (1) và (2) cho ta: A là trọng tâm tam giác $BNF \Leftrightarrow NF$ ngắn nhất.

□

Câu 5. Tìm ba chữ số tận cùng của tích của mười hai số nguyên dương đầu tiên.

Lời giải.

Đặt: $S = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$

$$\Rightarrow \frac{S}{100} = 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12 \text{ là một số nguyên.} \quad (1)$$

$\Rightarrow$ Hai chữ số tận cùng của S là 00.

Mặt khác, trong suốt quá trình nhân liên tiếp các thừa số ở vế phải của (1), nếu chỉ để ý đến chữ số tận cùng, ta thấy $\frac{S}{100}$ có chữ số tận cùng là 6 (vì $3 \cdot 4 = 12$; $2 \cdot 6 = 12$; $2 \cdot 7 = 14$;

$$14; 4 \cdot 8 = 32;$$

$$2 \cdot 9 = 18; 8 \cdot 11 = 88; 8 \cdot 12 = 96).$$

Vậy ba chữ số tận cùng của S là 600.

□

—————HẾT—————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 11

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
TOÁN 9 NĂM HỌC 2010-2011,
LÂM ĐỒNG

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1. Rút gọn $A = \sqrt{127 - 48\sqrt{7}} - \sqrt{127 + 48\sqrt{7}}$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{64 - 2.8.3\sqrt{7} + 63} + \sqrt{64 + 2.8.3\sqrt{7} + 63} \\ &= \sqrt{(8 - 3\sqrt{7})^2} + \sqrt{(8 + 3\sqrt{7})^2} \\ &= |8 - 3\sqrt{7}| + |8 + 3\sqrt{7}| \\ &= 8 - 3\sqrt{7} + 8 + 3\sqrt{7} = 16 \end{aligned}$$

Vậy $A = 16$. □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = (3m^2 - 7m + 5)x - 2011$ (*). Chứng minh hàm số (*) luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ với mọi m .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 3m^2 - 7m + 5 &= 3\left(m^2 - \frac{7}{3}m\right) + 5 = 3\left(m^2 - 2.\frac{7}{6}m + \frac{49}{36} - \frac{49}{36}\right) + 5 \\ &= 3\left(m - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{12} + 5 \\ &= 3\left(m - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{11}{12} > 0 \text{ với mọi } m \end{aligned}$$

Do đó hàm số (*) luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ với mọi m . □

Câu 3. Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện $3x + y - 1 = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = 3x^2 + y^2$.

Lời giải.

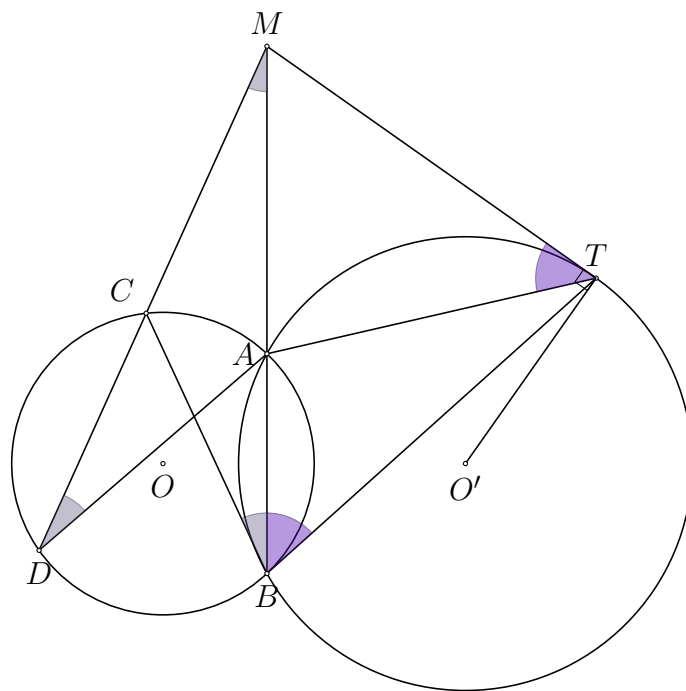
Ta có $3x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - 3x$. Do đó

$$\begin{aligned} B &= 3x^2 + (1 - 3x)^2 = 12x^2 - 6x + 1 = 12\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{48}\right] \\ &= 12\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Vậy GTNN của B là $\frac{1}{4}$ khi $x = \frac{1}{4}$ và $y = \frac{1}{4}$. $\square$

Câu 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B . Trên đường thẳng AB lấy điểm M sao cho A nằm giữa M và B . Từ M kẻ cát tuyến MCD với đường tròn (O) và tiếp tuyến MT với đường tròn (O') (T là tiếp điểm). Chứng minh $MC.MD = MT^2$.

Lời giải.



Xét $\triangle MCB$ và $\triangle MAD$, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{DMB} \text{ chung} \\ \widehat{MDA} = \widehat{MBC} (= \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AC}) \\ MA.MB \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MCB \sim \triangle MAD \Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{MB}{MD} \text{ hay } MC.MD =$$

Xét $\triangle MTA$ và $\triangle MBT$, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{BMT} \text{ chung} \\ \widehat{MTA} = \widehat{MBT} (= \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AT}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MTA \sim \triangle MBT \Rightarrow \frac{MT}{MB} = \frac{MA}{MT} \text{ hay } MT^2 = MA.MB \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MC.MD = MT^2$ (đpcm) $\square$

Câu 5. Chứng minh tổng $C = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2011}$ chia hết cho 15.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} C &= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2011} \\ &= (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7) + \dots + (2^{2008} + 2^{2009} + 2^{2010} + 2^{2011}) \\ &= (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + 2^4(1 + 2 + 2^2 + 2^3) + \dots + 2^{2008}(1 + 2 + 2^2 + 2^3) \\ &= 15(1 + 2^4 + \dots + 2^{2008}) : 15 \end{aligned}$$

Vậy C chia hết cho 15. □

Câu 6. Phân tích đa thức $x^3 - x^2 - 14x + 24$ thành nhân tử.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 14x + 24 &= x^3 + 4x^2 - 5x^2 - 20x + 6x + 24 \\ &= x^2(x + 4) - 5x(x + 4) + 6(x + 4) \\ &= (x + 4)(x^2 - 5x + 6) \\ &= (x + 4)(x - 3)(x - 2) \end{aligned}$$

□

Câu 7. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4. \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - x - y \\ z^2 = 2xy - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - x - y)^2 = 2xy - 4 \\ z = 2 - x - y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 0 \\ z = 2 - x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ z = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Câu 8. Chứng minh $D = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ không phải là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} D &= n(n + 1)(n + 2)(n + 3) \\ &= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) \\ &= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) \\ &\Rightarrow (n^2 + 3n)^2 < D < (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 \\ &\Rightarrow (n^2 + 3n)^2 < D < (n^2 + 3n + 1)^2 \end{aligned}$$

Do đó D không phải là số chính phương vì $(n^2 + 3n)^2$ và $(n^2 + 3n + 1)^2$ là hai số chính phương liên tiếp. □

Câu 9. Cho hai số dương a và b . Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(a-b)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a} + \frac{4}{b} \quad (\text{Vì } (a+b)ab > 0) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \quad (\text{đpcm})\end{aligned}$$

□

Câu 10. Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình $2x^2 - xy - y^2 - 8 = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}2x^2 - xy - y^2 - 8 = 0 &\Leftrightarrow (2x+y)(x-y) = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=8 \\ x-y=1 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} 2x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}\end{aligned}$$

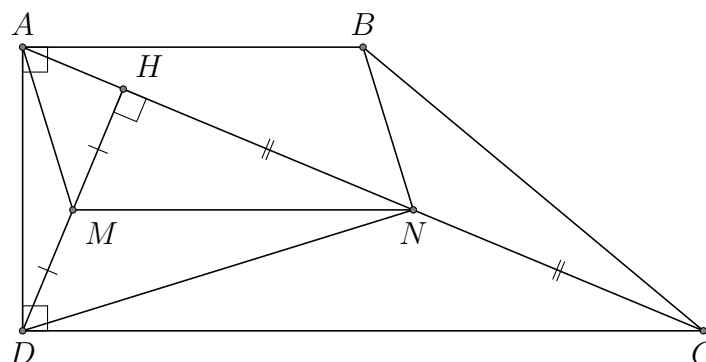
Vậy các nghiệm tự nhiên của hệ là $(3; 2)$ và $(2; 0)$.

□

Câu 11. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), có $DC = 2AB$. Kẻ DH vuông góc với AC ($H \in AC$), gọi N là trung điểm của CH .

Chứng minh BN vuông góc với DN .

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của DH .

MN là đường trung bình của $\triangle HDC \Rightarrow MN \parallel CD, MN = \frac{1}{2}CD$

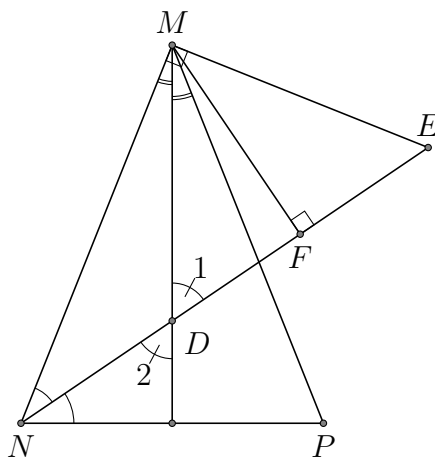
Do đó $MN \parallel AB, MN = AB \Rightarrow$ tứ giác $ABNM$ là hình bình hành.

Xét $\triangle ADN$ có $MN \parallel AB \Rightarrow MN \perp AD$ và $DH \perp AN$

nên M là trực tâm của $\triangle ADN \Rightarrow AM \perp DN \Rightarrow BN \perp DN$ (vì $ABNM$ là HBH). $\square$

Câu 12. Cho tam giác MPN cân tại M ($\widehat{M} < 90^\circ$). Gọi D là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác MPN . Biết $DM = 2\sqrt{5}\text{cm}$, $DN = 3\text{cm}$. Tính độ dài MN .

Lời giải.



Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với MN cắt ND tại E . Kẻ $MF \perp DN$.

Ta có $\widehat{E} + \widehat{MND} = 90^\circ$ (1)

$\widehat{DNP} + \widehat{D_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DNP} + \widehat{D_1} = 90^\circ$ (2)

Do $\widehat{MND} = \widehat{DNP}$ nên từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{E} = \widehat{D_1} \Rightarrow \triangle MDE$ cân tại M .

$\Rightarrow MD = ME = 2\sqrt{5}(\text{cm})$ và $EF = DF$.

$\triangle MNE$ vuông tại M . Ta có

$$ME^2 = EF \cdot EN = EF \cdot (2EF + DN)$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{5})^2 = EF \cdot (2EF + 3)$$

$$\Leftrightarrow 2EF^2 + 3EF - 20 = 0 \Leftrightarrow (EF + 4)(2EF - 5) = 0 \Rightarrow EF = 2,5 (\text{Vì } EF > 0).$$

Dễ dàng tính được $MN = 2\sqrt{11}(\text{cm})$. $\square$

—————HẾT—————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 12

ĐỀ THI HSG LỚP 9, NGHỆ AN,
BẢNG A, NĂM 2011

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1.

- a) Cho các số nguyên $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Đặt $S = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$ và $P = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Chứng minh rằng: S chia hết cho 6 khi và chỉ khi P chia hết cho 6.
- b) Cho $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ (với $n \in \mathbb{N}, n > 1$). Chứng minh rằng A không là số chính phương

Lời giải.

- a) Với số nguyên x , ta có

$$x^3 - x = x(x-1)(x+1) : 6.$$

Do đó

$$S - P = (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \dots + (a_n^3 - a_n) : 6.$$

Suy ra $S : 6 \Leftrightarrow P : 6$.

- b) Ta có $A = n^2(n^4 - n^2 + 2n + 2)$.

- Với $n = 2$, ta có $n^4 - n^2 + 2n + 2 = 18$ không là số chính phương nên A không là số chính phương.
- Với $n \geq 3$, ta có $n^2 - 2n - 2 > 0$ nên

$$(n^2 - 1)^2 = n^4 - 2n^2 + 1 < n^4 - n^2 + 2n + 2 < (n^2)^2,$$

do đó $n^4 - n^2 + 2n + 2$ không là số chính phương.

Từ đó ta có A không là số chính phương với mọi $n \geq 2$.

□

Câu 2.

a) Giải phương trình: $10\sqrt{x^3 + 1} = 3x^2 + 6$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 3 \\ y + \frac{1}{z} = 3 \\ z + \frac{1}{x} = 3 \end{cases}.$$

Lời giải.

a) Điều kiện: $x \geq -1$.

Ta có $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, $x^2 + 2 = (x^2 - x + 1) + (x + 1)$.

Đặt $a = \sqrt{x + 1}$, $b = \sqrt{x^2 - x + 1}$ ta có phương trình

$$10ab = 3a^2 + 3b^2 \Leftrightarrow (3a - b)(a - 3b) = 0 \Leftrightarrow a = 3b, b = 3a.$$

• $a = 3b \Leftrightarrow \sqrt{x + 1} = 3\sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow 9x^2 - 10x + 8 = 0$. Phương trình vô nghiệm.

• $b = 3a \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = 3\sqrt{x + 1} \Leftrightarrow x^2 - 10x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \pm \sqrt{33}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 5 \pm \sqrt{33}$.

b) Từ phương trình $x + \frac{1}{y} = 3$ ta có $x = \frac{3y - 1}{y}$, thay vào phương trình thứ ba ta được

$$z = 3 - \frac{1}{x} = 3 - \frac{y}{3y - 1} = \frac{8y - 3}{3y - 1}.$$

Thay z và phương trình thứ hai ta có

$$y + \frac{3y - 1}{8y - 3} = 3 \Leftrightarrow y^2 - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Từ đó ta có nghiệm của hệ là $x = y = z = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

□

Câu 3.

a) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z} \leq 1.$$

- b) Cho các số thực dương thỏa mãn $x^{2011} + y^{2011} + z^{2011} = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = x^2 + y^2 + z^2$.

Lời giải.

- a) Với $a, b, c, d > 0$ ta có

$$\frac{1}{a+b+c+d} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right).$$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x+y+z} &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \\ \frac{1}{x+2y+z} &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right) \\ \frac{1}{x+y+2z} &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \right). \end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta có đpcm.

- b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2011 số gồm 2 số x^{2011} và 2009 số 1 ta có

$$2x^{2011} + 2009 = x^{2011} + x^{2011} + 1 + \dots + 1 \geq 2011 \sqrt[2011]{x^{2 \cdot 2011}} = 2011 \cdot x^2.$$

Tương tự:

$$2y^{2011} + 2009 \geq 2011 \cdot y^2, \quad 2z^{2011} + 2009 \geq 2011 \cdot z^2.$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta có

$$2011(x^2 + y^2 + z^2) \leq 2(x^{2011} + y^{2011} + z^{2011}) + 3 \cdot 2009 = 3 \cdot 2011.$$

Suy ra $M \leq 3$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

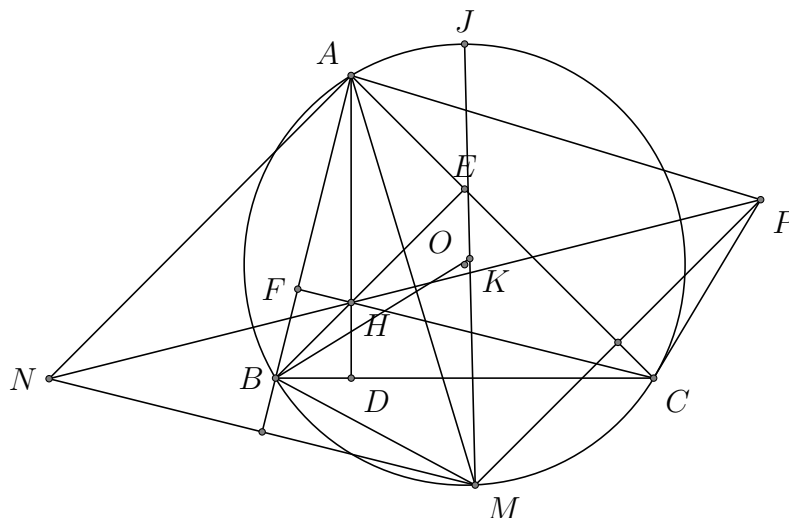
Vậy $\max M = 3$.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , H là trực tâm của tam giác. Gọi M là một điểm nằm trên cung BC không chứa A (M không trùng với B và C). Gọi N và P lần lượt là điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB và AC .

- a) Chứng minh rằng ba điểm N, H, P thẳng hàng.
b) Khi $\widehat{BOC} = 120^\circ$, xác định vị trí của điểm M để $\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.



- a) Gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ A, B, C . Ta có tứ giác $CDHE$ nội tiếp và M, N đối xứng nhau qua AB , nên

$$\widehat{AHE} = \widehat{ACB} = \widehat{AMB} = \widehat{ANB}.$$

Suy ra tứ giác $ANBH$ nội tiếp, nên

$$\widehat{NHB} = \widehat{NAB} = \widehat{BAM}.$$

Tương tự $\widehat{PHC} = \widehat{CAM}$. Từ đó, suy ra

$$\widehat{NHB} + \widehat{BHC} + \widehat{CHP} = \widehat{BAM} + \widehat{BHC} + \widehat{MAC} = \widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^\circ.$$

Suy ra N, H, P thẳng hàng.

- b) Gọi J là điểm chính giữa cung lớn BC , trên đoạn MJ lấy K sao cho $MB = MK$. Ta có $\widehat{BIC} = 120^\circ$ và $\triangle JKB = \triangle CM$, nên $JK = CM$. Do đó $BM + CM = MK + KJ = JM$. Khi đó

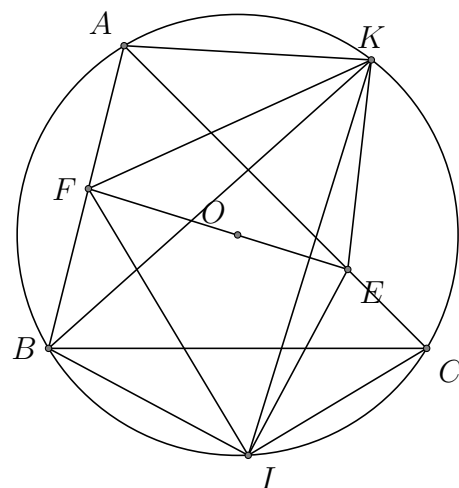
$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \geq \frac{4}{MB + MC} = \frac{4}{JM} \geq \frac{4}{2R}.$$

Đẳng thức xảy ra khi M là điểm chính giữa cung BC .

□

Câu 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , một điểm I chuyển động trên cung BC không chứa điểm A (I không trùng với B và C). Đường thẳng vuông góc với IB tại I cắt đường thẳng AC tại E , đường thẳng vuông góc với IC tại I cắt đường thẳng AB tại F . Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



- Nếu $\widehat{BAC} = 90^\circ$ thì $\widehat{BIC} = 90^\circ$, khi đó EF là đường kính nên EF đi qua O .
- Xét $\widehat{BAC} < 90^\circ$, khi đó $\widehat{BIC} > 90^\circ$. Gọi K là điểm đối xứng với I qua EF , ta có $\widehat{EIF} = \widehat{EAF}$ (cùng bù với $\widehat{BIC}$), $\widehat{EKF} = \widehat{EIF}$, suy ra $\widehat{EKF} = \widehat{EAF}$ nên tứ giác $AEKF$ nội tiếp, hay $K \in (O)$. Mà EF là đường trung trực đoạn IK nên EF đi qua O .
- $\widehat{BAC} > 90^\circ$ thì $\widehat{BIC} < 90^\circ$. Chứng minh tương tự ta cũng có EF đi qua O .

Vậy EF luôn đi qua điểm cố định O .

□

—————HẾT—————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 13

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
TOÁN 9 NĂM HỌC 2010-2011,
QUẢNG BÌNH

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}}}$ với $4 < x \leq 8$.

- a) Rút gọn biểu thức A .
 b) Tìm x nguyên để A có giá trị nguyên.

Lời giải.

a) Với $4 < x \leq 8$. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{x-4+4\sqrt{x-4}+4} + \sqrt{x-4-4\sqrt{x-4}+4}}{\sqrt{\left(1-\frac{4}{x}\right)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{4}{x}\right)^2}} = \frac{|\sqrt{x-4}+2| + |\sqrt{x-4}-2|}{\left|1-\frac{4}{x}\right|} \\ &= \frac{\sqrt{x-4}+2+2-\sqrt{x-4}}{\frac{x-4}{x}} = \frac{4x}{x-4}. \end{aligned}$$

b) Ta có: $A = 4 + \frac{16}{x-4}$ với $4 < x \leq 8$.

Do đó với x nguyên, A nguyên khi và chỉ khi $x-4$ là ước của 16.

Kết hợp với điều kiện đã cho ta có:

$$\begin{cases} x-4=1 \\ x-4=2 \\ x-4=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=6 \\ x=8 \end{cases}$$

□

Câu 2. Số đo hai cạnh góc vuông của một tam giác là nghiệm của phương trình bậc hai

$$(m-2)x^2 - 2(m-1)x + m = 0$$

Xác định m để số đo đường cao ứng với cạnh huyền của tam giác đã cho là $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Gọi x_1, x_2 là số đo hai cạnh góc vuông của tam giác đã cho, vì chúng là nghiệm của phương trình bậc hai $(m-2)x^2 - 2(m-1)x + m = 0$ nên ta có điều kiện:

$$\begin{cases} m \neq 2 \\ \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ \frac{m}{m-2} > 0 \\ \frac{m-1}{m-2} > 0 \end{cases} \quad (*)$$

Từ giả thiết bài toán ta có:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{5}{4}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m^2 - 4m + 4}{m^2} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 3m^2 - 16m + 16 = 0 \Leftrightarrow m = 4; m = \frac{4}{3}.$$

Thử lại ta thấy chỉ có giá trị $m = 4$ thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy: $m = 4$ là giá trị cần tìm. $\square$

Câu 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B . Tiếp tuyến chung gần B của hai đường tròn lần lượt tiếp xúc (O) và (O') tại C và D . Qua A kẻ đường thẳng song song CD cắt (O) và (O') lần lượt tại M và N . Các đường thẳng BC, BD lần lượt cắt MN tại P và Q . Các đường thẳng CM, DN cắt nhau tại E . Chứng minh rằng:

a) Các đường thẳng AE và CD vuông góc nhau.

b) Tam giác EPQ cân.

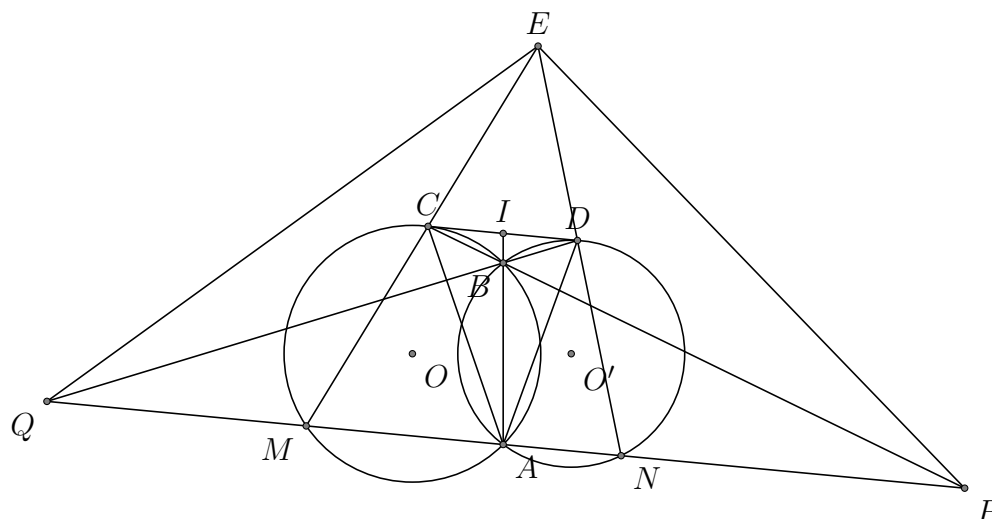
Lời giải.

a) Ta có: $\widehat{ECD} = \widehat{CMA}$ (đồng vị), $\widehat{CDA} = \widehat{CMA}$ (cùng chắn cung $\widehat{CA}$).

Nên $\widehat{ECD} = \widehat{DCA}$. Chứng minh tương tự ta có: $\widehat{EDC} = \widehat{CDA}$.

Suy ra: $\triangle CDE = \triangle CDA (g.c.g) \Rightarrow CE = CA \Rightarrow \triangle CEA$ cân tại C .

Theo chứng minh trên thì CD là đường phân giác của $\widehat{ECA}$. Nên: $CD \perp AE$.



b) Gọi I là giao điểm của CD và AB . Ta có: $\widehat{IAD} = \widehat{IDB}$ (cùng chắn cung $\widehat{BD}$)
 $\Rightarrow \triangle IAD \sim \triangle IDB (g.g) \Rightarrow \frac{IA}{ID} = \frac{ID}{IB} \Rightarrow ID^2 = IA \cdot IB$.

Chứng minh tương tự ta có: $IC^2 = IA \cdot IB$. Suy ra: $IC^2 = ID^2 \Rightarrow IC = ID$.

Ta có: $CD \parallel PQ \Rightarrow \frac{CI}{AP} = \frac{BI}{BA} = \frac{DI}{AQ}$.

Vì: $CI = DI \Rightarrow AP = AQ$ hay A là trung điểm PQ .

Mặt khác: $CD \perp AE, CD \parallel PQ$ nên: $PQ \perp AE$. Vậy tam giác EPQ có AE vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên nó là tam giác cân.

□

Câu 4. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Chứng minh: $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 3$.

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 3 \Leftrightarrow \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \right)^2 \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \geq 3$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} \geq 2y^2; \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \geq 2z^2; \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} \geq 2x^2.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \geq x^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

$$\text{Vậy } \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 3. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x = y = z = 1.$$

□

Câu 5. Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn: $a^5 + b^5 = 4(c^5 + d^5)$. Chứng minh rằng: $a + b + c + d$ chia hết cho 5.

Lời giải.

Ta chứng minh $(n^5 - n) : 5$.

Ta có:

$$(n^5 - n) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) + 5n(n^2 - 1)$$

$$= [(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5n(n^2 - 1)] : 5$$

Suy ra:

$$a^5 - a + b^5 - b + c^5 - c + d^5 - d = [5(c^5 + d^5) - (a + b + c + d)] : 5$$

$$\Rightarrow (a + b + c + d) : 5$$

□

————— HẾT —————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 14

ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2012-2013, AN
GIANG

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1.

a) Khử căn ở mẫu số biểu thức sau:

$$A = \frac{59}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}.$$

b) Tính tổng sau:

$$S = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2011} + \sqrt{2013}}.$$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} A &= \frac{59}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}} \\ &= \frac{59(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})} \\ &= \frac{59(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})}{8 + 2\sqrt{15} - 7} \\ &= \frac{59(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})(1 - 2\sqrt{15})}{(1 + 2\sqrt{15})(1 - 2\sqrt{15})} \\ &= \frac{59(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})(1 - 2\sqrt{15})}{1 - 60} \\ &= (\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})(2\sqrt{15} - 1). \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+2}}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Áp dụng tính chất trên cho từng số hạng của tổng trên ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

...

$$\frac{1}{\sqrt{2011} + \sqrt{2013}} = \frac{\sqrt{2013}}{2} - \frac{\sqrt{2011}}{2}.$$

Cộng theo từng vế ta được: $S = \frac{\sqrt{2013} - \sqrt{3}}{2}$.

□

Câu 2. Cho đa thức: $Q(x) = x^4 + 3x^2 + 1$.

- Phân tích đa thức $Q(x)$ thành nhân tử.
- Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2 = x^4 + 3x^2 + 1$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^4 + 3x^2 + 1 \\ &= (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \\ &= \left(x^2 + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ &= \left(x^2 + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \left(x^2 + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right). \end{aligned}$$

b) Phương trình $y^2 = x^4 + 3x^2 + 1$.

- Nếu $x = 0$ thì $y^2 = 1$ hay $y = \pm 1$.
- Với $x \neq 0$, do x là số nguyên nên ta có:

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2 + 1 &< x^4 + 3x^2 + 1 < x^4 + 4x^2 + 4 \\ \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 &< y^2 < (x^2 + 2)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 1 &< |y| < x^2 + 2. \end{aligned}$$

Do $x^2 + 1$ và $x^2 + 2$ là hai số nguyên liên tiếp nên không tồn tại số nguyên nào nằm giữa hai số nguyên liên tiếp này. Vậy trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên $(0; 1)$ và $(0; -1)$.

□

Câu 3.

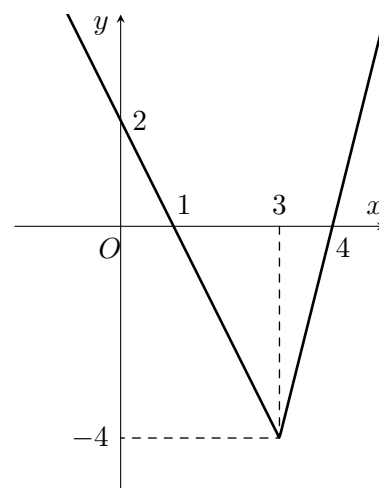
- a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = |3x - 9| + x - 7$.
- b) Giải phương trình $3\sqrt{x^2 - 6\sqrt{x^2} + 9} + \sqrt{x^2} - 7 = 0$.

Lời giải.

$$a) y = f(x) = |3x - 9| + x - 7 = \begin{cases} 4x - 16 & \text{khi } x \geq 3 \\ -2x + 2 & \text{khi } x < 3. \end{cases}$$

- Với $x \geq 3$ đồ thị hàm số là đường thẳng $y = 4x - 16$ qua hai điểm $(3; -4)$ và $(4; 0)$.
- Với $x < 3$ đồ thị hàm số là đường thẳng $y = -2x + 2$ qua hai điểm $(0; 2)$ và $(1; 0)$.

Đồ thị hàm số như hình vẽ:



- b) Giải phương trình $3\sqrt{x^2 - 6\sqrt{x^2} + 9} + \sqrt{x^2} - 7 = 0$.

$$\begin{aligned} 3\sqrt{x^2 - 6\sqrt{x^2} + 9} + \sqrt{x^2} - 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{|x|^2 - 6|x| + 9} + |x| - 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{(|x| - 3)^2} + |x| - 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3||x| - 3| + |x| - 7 &= 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = |x|$ (với $t \geq 0$) ta được phương trình:

$$\begin{aligned} 3|t - 3| + t - 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow |3t - 9| + t - 7 &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Dựa vào đồ thị ở câu trên, ta thấy phương trình $(*)$ có hai nghiệm là $t = 1$ và $t = 4$ (đều thỏa mãn $t \geq 0$).

- Với $t = 1$ ta được $|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

- Với $t = 4$ ta được $|x| = 4 \Leftrightarrow x = \pm 4$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-4; -1; 1; 4\}$.

□

Câu 4. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x + my = 1 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số}).$$

- Tìm m để hệ phương trình có nghiệm, tìm nghiệm đó.
- Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (x + 2y + 1)^2 + (3x + my - 1)^2.$$

Lời giải.

$$\begin{cases} x + 2y = -1 & (1) \\ 3x + my = 1 & (2). \end{cases}$$

- Từ phương trình (1) suy ra $x = -1 - 2y$, thế vào phương trình (2) ta được:

$$3(-1 - 2y) + my = 1 \Leftrightarrow (m - 6)y = 4 \quad (3)$$

- Nếu $m = 6$ thì phương trình (3) vô nghiệm. Do đó hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Nếu $m \neq 6$ thì phương trình (3) có nghiệm $y = \frac{4}{m-6}$. Khi đó $x = \frac{-m-2}{m-6}$. Do đó hệ phương trình đã cho có nghiệm $\left(\frac{-m-2}{m-6}; \frac{4}{m-6}\right)$.

- $P = (x + 2y + 1)^2 + (3x + my - 1)^2$.

- Với $m = 6$, ta được: $P = (x + 2y + 1)^2 + (3x + 6y - 1)^2 = (x + 2y + 1)^2 + (3x + 6y + 3 - 4)^2$.
Đặt $t = x + 2y + 1$, khi đó

$$\begin{aligned} P &= t^2 + (3t - 4)^2 \\ &= 10t^2 - 24t + 16 \\ &= 10 \left(t^2 - 2 \cdot t \cdot \frac{6}{5} + \frac{36}{25} + \frac{4}{25} \right) \\ &= 10 \left(t - \frac{6}{5} \right)^2 + \frac{8}{5} \geq \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x + 2y + 1 = \frac{6}{5}$.

- Với $m \neq 6$, ta được:

$$P = (x + 2y + 1)^2 + (3x + my - 1)^2 \geq 0.$$

Dấu “=” xảy ra khi x và y là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x + my = 1. \end{cases}$$

Vậy:

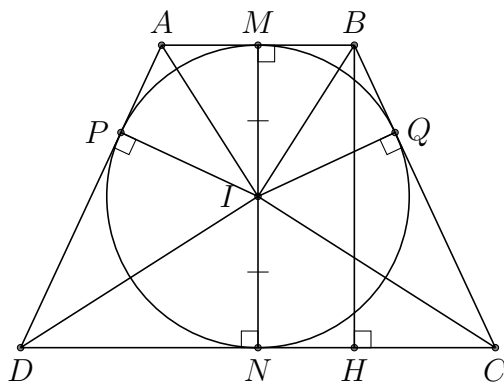
- $m = 6$ thì giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{8}{5}$.
- $m \neq 6$ thì giá trị nhỏ nhất của P bằng 0.

□

Câu 5. Cho hình thang cân $ABCD$ cạnh bên là AD và BC ngoại tiếp đường tròn tâm I bán kính $R = 2$.

- Chứng minh rằng hai tam giác IAD và IBC vuông.
- Cho $AB = 2x$ ($0 < x < 2$). Tính diện tích hình thang $ABCD$ theo x .

Lời giải.



- Hình thang ngoại tiếp đường tròn tâm I nên tâm I của đường tròn nằm trên MN với M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD .

Gọi P, Q lần lượt là tiếp điểm của đường tròn với cạnh AD và BC của hình thang. Khi đó: $BM = BQ$; $CN = CQ$ (hai tiếp tuyến xuất phát từ một điểm ở ngoài đường tròn).

Suy ra $\triangle IBM = \triangle IBQ$, suy ra IB là phân giác của $\widehat{MIQ}$.

Và $\triangle ICQ = \triangle ICN$, suy ra IC là phân giác của $\widehat{NIQ}$.

Vậy $\widehat{BIC} = 90^\circ$ (hai phân giác của hai góc kề bù).

Hay tam giác IBC vuông tại I .

Tương tự ta được tam giác IAD vuông tại I .

b) Theo chứng minh trên ta có $BM = BQ$; $CN = CQ$.

Suy ra $BC = BM + CN$.

Do M là trung điểm của AB nên $MB = x$.

Từ B kẻ BH vuông góc CD , tam giác BHC vuông tại H ta được:

$$\begin{aligned} BC^2 &= BH^2 + HC^2 \\ \Leftrightarrow (2x + HC)^2 &= 4^2 + HC^2 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 4xHC + HC^2 &= 4^2 + HC^2 \\ \Leftrightarrow 4xHC &= 4^2 - 4x^2 \\ \Leftrightarrow HC &= \frac{4 - x^2}{x}. \end{aligned}$$

Do đó diện tích của hình thang $ABCD$ là:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot MN = \frac{1}{2} \left[2x + 2x + \frac{2(4 - x^2)}{x} \right] \cdot 4 = 4 \left(2x + \frac{4 - x^2}{x} \right).$$

□

—————HẾT—————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 15

HSG TOÁN 9, HUYỆN BÌNH
GIANG, TỈNH HẢI DƯƠNG,
NĂM HỌC 2012 - 2013

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1. Cho biểu thức $A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn A .

b) Chứng tỏ rằng $A < \frac{1}{3}$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} A &= \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \\ A &= \frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\ A &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}, \text{ với } x \geq 0, x \neq 1. \end{aligned}$$

b) Xét $\frac{1}{3} - A = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x+\sqrt{x}+1}$.

Với mọi $x \geq 0, x \neq 1$ ta có $(\sqrt{x}-1)^2 > 0$ và $x+\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ nên
suy ra $\frac{1}{3} - A > 0 \Leftrightarrow A < \frac{1}{3}$.

□

Câu 2.

a) Giải phương trình $x - \sqrt{x-15} = 17$.

b) Tìm x, y sao cho $5x - 2\sqrt{x}(2+y) + y^2 + 1 = 0$.

Lời giải.

a) Điều kiện xác định $x \geq 15$.

$$x - \sqrt{x-15} = 17 \Leftrightarrow x - 15 - \sqrt{x-15} - 2 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x-15} \ (t \geq 0) \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2, \text{ suy ra } \sqrt{x-15} = 2 \Leftrightarrow x - 15 = 4 \Leftrightarrow x = 19.$$

b) Điều kiện xác định $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} 5x - 2\sqrt{x}(2+y) + y^2 + 10 &\Leftrightarrow 4x - 4\sqrt{x} + 1 + x - 2y\sqrt{x} + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{x} - y)^2 = 0. (1) \end{aligned}$$

Vì $(2\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{x} - y)^2 \geq 0$ với mọi $x \geq 0, y$ nên để (1) xảy ra thì

$$\begin{cases} 2\sqrt{x} - 1 = 0 \\ \sqrt{x} - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

□

Câu 3.

a) Tìm số nguyên x , sao cho $x^2 + x - p = 0$ với p là số nguyên tố.

b) Tìm m để hàm số bậc nhất $y = \frac{m^2 - 2013m + 2012}{m^2 - 2\sqrt{2}m + 3}x - 2011$ là hàm số nghịch biến.

Lời giải.

a) Theo bài ta có $p = x^2 + x = x(x+1)$. Mà $x, x+1$ là hai số nguyên liên tiếp nên suy ra p là số chẵn.

Mặt khác p là số nguyên tố nên $p = 2$.

$$\text{Suy ra } x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2.$$

b) Để hàm số $y = \frac{m^2 - 2013m + 2012}{m^2 - 2\sqrt{2}m + 3}x - 2011$ nghịch biến thì $\frac{m^2 - 2013m + 2012}{m^2 - 2\sqrt{2}m + 3} < 0$.
(1)

Ta có $m^2 - 2\sqrt{2}m + 3 = (\sqrt{2} - m)^2 + 1 \geq 0$ với mọi m nên (1) tương đương với

$$m^2 - 2013m + 2012 < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-2012) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ m-2012 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2012.$$

□

Câu 4. 1) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$, hai đường cao BE và CF của tam giác cắt nhau tại H . Kẻ đường kính AK của đường tròn $(O; R)$, gọi I là trung điểm của BC .

a) Chứng minh $AH = 2IO$.

b) Biết $\widehat{BAC} = 60^\circ$, tính độ dài dây BC theo R .

2) Cho $\triangle ABC$ ($\hat{A} = 90^\circ$), $BC = a$. Gọi bán kính của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ là r . Chứng minh rằng $\frac{r}{a} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Lời giải.

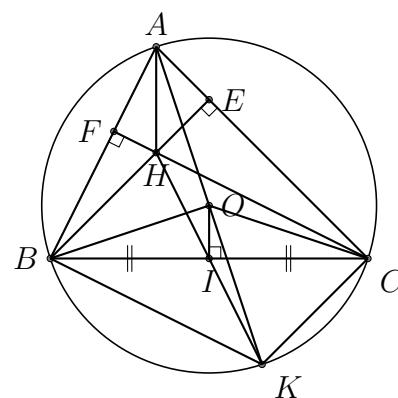
1)

a) Vì B, C thuộc đường tròn đường kính AK nên $\widehat{ABK} = \widehat{ACK} = 90^\circ$.

Suy ra $KB \perp AB$, $KC \perp AC$.

Mà $CH \perp AB$, $BH \perp AC$ (gt) nên suy ra $BK \parallel CH$, $CK \parallel BH$.

Suy ra $BHCK$ là hình bình hành. Mà I là trung điểm BC nên suy ra I là trung điểm HK .



Từ đó ta có OI là đường trung bình của $\triangle KAH$ nên $OI = \frac{1}{2}AH$ hay $AH = 2OI$.

b) Ta có $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 120^\circ$.

$\triangle BOC$ cân tại O và có OI là đường trung tuyến nên cũng là đường phân giác và đường cao. Suy ra $\widehat{BOI} = \widehat{COI} = 60^\circ$ và $OI \perp BC$.

Xét tam giác COI vuông tại I , ta có $IC = OC \cdot \sin \widehat{COI} = R \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}R}{2}$.

Suy ra $BC = 2IC = R\sqrt{3}$.

2) $\frac{r}{a} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2} \Leftrightarrow 2r \leq a\sqrt{2} - a \Leftrightarrow 2r + a \leq a\sqrt{2}$. (1)

$AB + AC = AE + EB + AF + FC = OF + BD + OE + CD = 2r + a$.

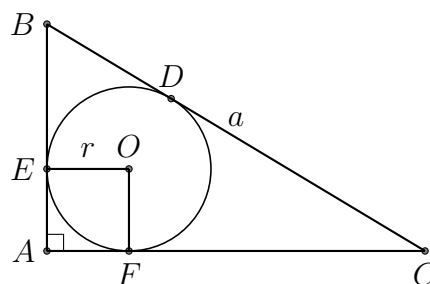
Ta cần chứng minh $AB + AC \leq BC\sqrt{2}$. (2)

Ta có (2) $\Leftrightarrow AB^2 + 2AB \cdot AC + AC^2 \leq 2BC^2$

$\Leftrightarrow AB^2 + 2AB \cdot AC + AC^2 \leq 2AB^2 + 2AC^2$

$\Leftrightarrow (AB - AC)^2 \geq 0$. (luôn đúng)

Vậy ta có $\frac{r}{a} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ là tam giác vuông cân tại



A.

□

Câu 5. Cho $x + 3y \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = x^2 + y^2$.

Lời giải.

Do $x + 3y \geq 1$ nên đặt $x + 3y = 1 + a$, với $a \geq 0$. Suy ra $x = 1 + a - 3y$, thay vào biểu thức C ta có

$$\begin{aligned} C &= 10y^2 - 6ay - 6y^2 + a^2 + 2a + 1 \\ &= 10 \left[y - \frac{3}{10}(a + 1) \right]^2 + \frac{1}{10}(a^2 + 2a) + \frac{1}{10} \geq \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} y - \frac{3}{10}(a + 1) = 0 \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{10} \\ y = \frac{3}{10} \end{cases}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{1}{10}$ khi $x = \frac{1}{10}$ và $y = \frac{3}{10}$.

□

————— HẾT —————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 16

ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2012-2013, TP. ĐÀ
NẰNG

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}+1} + \frac{\sqrt{n+1}+3}{\sqrt{n+1}-3} - \frac{n-\sqrt{n+1}+7}{n-2\sqrt{n+1}-2}$ với $n \in \mathbb{N}, n \neq 8$

- a) Rút gọn biểu thức $Q = \frac{P}{n+3\sqrt{n+1}+1}$ với $n \in \mathbb{N}, n \neq 8$.
- b) Tìm tất cả các giá trị của n ($n \in \mathbb{N}, n \neq 8$) sao cho P là một số nguyên tố.

Lời giải.

a) Quy đồng $P = \frac{(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n+1}-3) + (\sqrt{n+1}+3)(\sqrt{n+1}+1) - (n-\sqrt{n+1}+7)}{(\sqrt{n+1}+1)(\sqrt{n+1}-3)}$.

Do đó $P = \frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+1)}{(\sqrt{n+1}+1)(\sqrt{n+1}-3)} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-3}$.

Suy ra $Q = \frac{P}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+3)} = \frac{1}{n-8}$.

b) $P = 1 + \frac{3}{\sqrt{n+1}-3}$. Để P là số nguyên thì $\sqrt{n+1}-3$ là ước của 3.

Suy ra $\sqrt{n+1}-3 \in \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow n \in \{-1; 3; 15; 35\}$. Thử lại ta thấy $n = 35$ thì $P = 2$ là số nguyên tố.

□

Câu 2.

a) Tìm x biết $2\sqrt{x+4} - 4\sqrt{2x-6} = x-7$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x+6 = 4\sqrt{y-4} \\ y+10 = 6\sqrt{z-9} \\ z-16 = 2\sqrt{x-1} \end{cases}.$$

Lời giải.

a) Điều kiện $-4 \leq x \leq 3$

Phương trình đã cho tương đương với $(\sqrt{x+4}+1)^2 = (\sqrt{2x-6}+2)^2$.

$$\text{Do đó ta có } \begin{cases} \sqrt{x+4} + 1 = \sqrt{2x-6} + 2 \\ \sqrt{x+4} + 1 = -\sqrt{2x-6} - 2 \text{ (vô lý)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

b) Điều kiện $x \geq 1, y \geq 4, z \geq 9$.

Cộng theo vế ta có $x + y + z - 2\sqrt{x-1} - 4\sqrt{y-4} - 6\sqrt{z-9} = 0$.

Phương trình trên tương đương với $(\sqrt{x-1}-1)^2 + (\sqrt{y-4}-2)^2 + (\sqrt{z-9}-3)^2 = 0$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} \sqrt{x-1}-1=0 \\ \sqrt{y-4}-2=0 \\ \sqrt{z-9}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=8 \\ z=18 \end{cases} . \text{ Thử lại thấy thỏa mãn.}$$

□

Câu 3.

- a) Cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$ có đồ thị đi qua điểm $M(1; 4)$. Biết rằng đồ thị của hàm số đã cho cắt trục Ox tại điểm P có hoành độ dương và cắt trục Oy tại điểm Q có tung độ dương. Tìm a và b sao cho $OP + OQ$ nhỏ nhất (với O là gốc tọa độ).
- b) Tìm số tự nhiên có 2 chữ số. Biết rằng nếu lấy tổng của 2 chữ số ấy cộng với 3 lần tích của 2 chữ số ấy thì bằng 17.

Lời giải.

$$\text{a) Giả sử } P \text{ có tọa độ } (p; 0) \text{ và } Q \text{ có tọa độ } (0; q). \text{ Khi đó ta có } \begin{cases} 0 = ap + b \\ q = a \cdot 0 + b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b = q \\ a = -\frac{q}{p} \end{cases} .$$

$$\text{Đồ thị hàm số đã cho đi qua } M(1; 4) \text{ nên } 4 = -\frac{q}{p} \cdot 1 + q \Rightarrow 1 = \frac{1}{p} + \frac{4}{q} \geq \frac{(1+2)^2}{p+q}.$$

$$\text{Do đó } OP + OQ = p + q \geq 9. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } \frac{1}{p} = \frac{4}{q} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = 8 \end{cases} .$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = -4 \\ b = 8 \end{cases}$$

b) Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$ ($0 < a \leq 9, 0 \leq b \leq 9, a, b \in \mathbb{N}$).

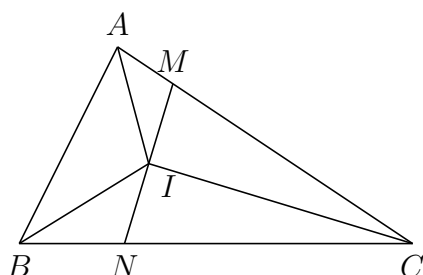
Khi đó ta có phương trình $a + b + 3ab = 17 \Rightarrow a = \frac{17-b}{1+3b}$. Thử các giá trị của b từ 0 đến 9 ta nhận được các số tự nhiên sau: 14 và 41.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , qua I vẽ đường thẳng vuông góc với đường thẳng CI , đường thẳng này cắt các cạnh AC, BC lần lượt tại M, N .

a) Chứng minh rằng hai tam giác IAM và BAI đồng dạng.

b) Chứng minh rằng $\frac{AM}{BN} = \left(\frac{AI}{BI}\right)^2$.



Lời giải.

a) Ta có

$$\widehat{AIC} = 180^\circ - \widehat{IAC} - \widehat{ICA} = 180^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2} - \frac{\widehat{BCA}}{2} = \frac{360^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{BCA}}{2} = \frac{180^\circ + \widehat{ABC}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{AIC} - 90^\circ = \frac{\widehat{ABC}}{2} \Rightarrow \widehat{AIM} = \widehat{ABI}. \text{ Từ đó suy ra } \triangle IAM \sim \triangle BAI \quad (g - g).$$

b) Tương tự ta cũng có $\triangle BIN \sim \triangle BAI$.

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{IN}{BN} = \frac{AI}{BI} \quad (1).$$

$$\text{Ngoài ra từ câu a) ta có } \frac{AM}{IM} = \frac{AI}{BI} \quad (2).$$

Mặt khác $\triangle CMN$ có CI là đường phân giác cũng là đường cao nên cân tại C .

Suy ra CI cũng là trung tuyến. Do đó $IM = IN \quad (3).$

Từ (1), (2) và (3) ta có điều cần chứng minh.

□

Câu 5. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}$ là góc tù. Vẽ các đường cao CD và BE của tam giác ABC (D nằm trên đường thẳng AB , E nằm trên đường thẳng AC). Gọi M, N lần lượt là chân đường vuông góc của B và C lên DE . Biết rằng S_1 là diện tích tam giác ADE , S_2 là diện tích tam giác BEM và S_3 là diện tích tam giác CDN . Tính diện tích tam giác ABC theo S_1, S_2, S_3 .

Lời giải.

Ta có tứ giác $BCDE$ nội tiếp nên $\widehat{BDM} = \widehat{BCE}$ và $\widehat{CDN} = \widehat{CBE}$.

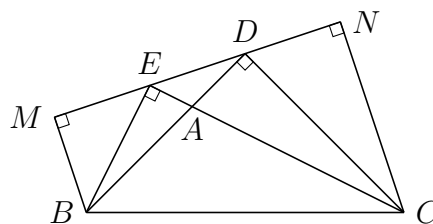
Suy ra $\triangle BDM \sim \triangle BCE$ và $\triangle DCN \sim \triangle BCE$.

Do đó $\frac{S_3}{S_{EBC}} = \frac{CD^2}{BC^2}$ và $\frac{S_{BDM}}{S_{EBC}} = \frac{BD^2}{BC^2}$.

Như vậy ta có $\frac{S_3 + S_{BDM}}{S_{EBC}} = 1 \Rightarrow S_3 + S_{BDM} = S_{EBC}$

Do đó $S_3 + S_1 + S_2 + S_{BAE} = S_{ABC} + S_{BAE}$.

Nên $S_{ABC} = S_1 + S_2 + S_3$.



□

————— HẾT —————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 17

ĐỀ THI HSG TOÁN 9 TỈNH HẢI
DƯƠNG NĂM HỌC 2012-2013.

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}}}$.

- a) Rút gọn A .
- b) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Lời giải.

- a) Điều kiện $x > 4$.

$$\text{Ta có } A = \frac{\sqrt{x-4} + 2 + |\sqrt{x-4} - 2|}{\frac{x-4}{2x}}$$

$$\text{Nếu } x > 8 \text{ thì } A = \frac{2x}{\sqrt{x-4}}.$$

$$\text{Nếu } 4 < x \leq 8 \text{ thì } A = \frac{4x}{x-4}.$$

- b) Với $A = \frac{4x}{x-4} + \frac{16}{x-4}$. $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 16 \vdots (x-4)$. Do $x \in \mathbb{Z}, 4 < x \leq 8$ nên $x \in \{5, 6, 8\}$.

$$\text{Với } A = \frac{2x}{\sqrt{x-4}} \in \mathbb{Z} \text{ thì do } x \in \mathbb{Z} \text{ nên } \sqrt{x-4} = a \in \mathbb{Z} \Rightarrow A = \frac{2(a^2+4)}{a} = 2a + \frac{8}{a} \Rightarrow 8 \vdots a.$$

Lại có $x > 8 \Rightarrow a > 2$, do đó $a = 4$ hoặc $a = 8$. Từ đó suy ra $x = 20$ hoặc $x = 68$.

Vậy $x \in \{5, 6, 8, 20, 68\}$.

□

Câu 2. Giải các phương trình

$$\text{a) } \sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2+2x-3}.$$

$$\text{b) } (4x+2)\sqrt{x+8} = 3x^2+7x+8.$$

Lời giải.

a) Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{x+3} &= \sqrt{x-2} + \sqrt{(x-1)(x+3)} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3})(\sqrt{x-1} - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = \sqrt{x+3} \text{ hoặc } \sqrt{x-1} &= 1\end{aligned}$$

Giải từng trường hợp ta được nghiệm là $x = 2$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

b) Điều kiện $x \geq -8$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}(\sqrt{x+8} - x - 2)(\sqrt{x+8} - 3x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+8} = x + 2 \text{ hoặc } \sqrt{x+8} &= 3x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet \text{ Trường hợp 1 } \sqrt{x+8} = x + 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \\ \bullet \text{ Trường hợp 2 } \sqrt{x+8} = 3x &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9x^2 - x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

□

Câu 3.

a) Cho $f(x) = (x^3 + 12x - 31)^{2013}$. Tính $f(a)$ với $a = \sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}}$.

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$.

Lời giải.

a) Ta có $a^3 = 32 + 3 \cdot (-4) \cdot a \Leftrightarrow a^3 + 12a - 31 = 1 \Rightarrow f(a) = 1^{2013} = 1$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}y^2 + 2xy - 3x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 &= x^2 + 3x + 2 \\ \Leftrightarrow (x + y)^2 &= (x + 1)(x + 2)(1)\end{aligned}$$

Với x, y nguyên thì vế trái của (1) là số chính phương, vế phải của (1) là tích hai số nguyên liên tiếp nên $(x + y)^2 = (x + 1)(x + 2) = 0$. Suy ra $(x; y) = (-1; 1)$ hoặc $(x; y) = (-2; 2)$.

**Câu 4.**

- a) Cho a, b, c là ba số hữu tỉ thỏa mãn $abc = 1$ và $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}$. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba số a, b, c là bình phương của một số hữu tỉ.
- b) Cho a, b, c là ba số dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$.

Lời giải.

- a) Vì $abc = 1$ nên

$$\begin{aligned} \frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} &= \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \\ \Leftrightarrow a^3c^2 + b^3a^2 + c^3a^2 &= a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 \\ \Leftrightarrow (a^2b^2c^2 - a^3c^2) - (b^3a^2 - a^3b^2) - (c^3b^2 - c^3a) - (b^3c - abc) &= 0 \\ \Leftrightarrow (b^2 - a)((a^2c^2 - ba^2) - (c^3 - bc)) &= 0 \\ \Leftrightarrow (b^2 - a)(c^2 - b)(a^2 - c) &= 0 \end{aligned}$$

Vậy ta được điều phải chứng minh.

- b) Vì a, b dương và $1 + b^2 \geq 2b$ với mọi b nên $\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} = a - \frac{ab}{2}$.

Tương tự ta cũng có $\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}$; $\frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$. Mà $a + b + c = 3$ nên cộng các bất đẳng thức trên với nhau ta được

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{ab+bc+ca}{2} \quad (1)$$

Mặt khác cũng do $a+b+c=3$ suy ra $(a+b+c)^2 = 9 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = 9$.

Mà $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ nên $ab+bc+ca \leq 3$. (2) Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

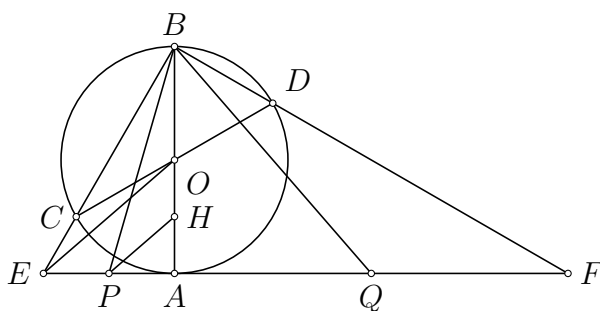


Câu 5. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai đường kính AB, CD sao cho tiếp tuyến tại A của $(O; R)$ cắt các đường thẳng BC, BD tại hai điểm tương ứng là E, F . Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE, AF .

- a) Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác BPQ là trung điểm của đoạn thẳng OA .

- b) Hai đường kính AB, CD thỏa mãn điều kiện gì thì tam giác BPQ có diện tích nhỏ nhất.
- c) Chứng minh rằng $CE \cdot DF \cdot EF = CD^3$ và $\frac{BE^3}{BF^3} = \frac{CE}{DF}$.
- d) Biết rằng tam giác BEF có một hình vuông $BMKN$ nội tiếp, $K \in EF$, $M \in BE$, $N \in BF$ sao cho tỉ số giữa cạnh của hình vuông với bán kính đường tròn nội tiếp tam giác BEF là $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. Tính các góc nhọn của tam giác BEF .

Lời giải.



5

Lời giải.

- a) BA là đường cao của tam giác $\triangle BPQ \Rightarrow H \in BA$. (1)

$$\text{Ta có } AB^2 = AE \cdot AF \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF} \Rightarrow \frac{AE}{AO} = \frac{AB}{AO}.$$

Lại có $\triangle AEO$ đồng dạng với $\triangle ABQ \Rightarrow \widehat{AEO} = \widehat{ABQ}$.

Mặt khác $\widehat{ABQ} = \widehat{APH} \Rightarrow \widehat{AEO} = \widehat{APH}$ nên $PH \parallel EO$ (2)

Trong tam giác $AE O$ có P là trung điểm của AE , kết hợp với (1), (2) suy ra H là trung điểm của OA .

b) Ta có $S_{BPQ} = \frac{AB \cdot PQ}{2} = R \cdot PQ = R(AP + AQ) = \frac{R(AE + AF)}{2} \geq R\sqrt{AE \cdot AF} = 2R^2$.

Suy ra $S_{BPQ} = 2R^2 \Leftrightarrow AE = AF \Leftrightarrow \triangle BEF$ vuông cân tại $B \Leftrightarrow \triangle BCD$ vuông cân tại $B \Leftrightarrow AB \perp CD$.

Vậy tam giác BPQ có diện tích nhỏ nhất khi $AB \perp CD$.

- c) Ta có $AC \perp BE$; $AD \perp BF$ do đó $CD^4 = AB^4 = (AE \cdot AF)^2 = AE^2 \cdot AF^2 = (EC \cdot EB)(FD \cdot FB) = (EC \cdot FD)(EB \cdot FB) = (EC \cdot FD)(AB \cdot EF) = CE \cdot DF \cdot CD \cdot EF \Rightarrow CD^3 = CE \cdot DF \cdot EF$.

$$\begin{aligned} \text{Ta cũng có } \frac{BE^2}{BF^2} &= \frac{EA \cdot EF}{FA \cdot FE} = \frac{EA}{FA}. \\ \Rightarrow \frac{BE^4}{BF^4} &= \frac{EA^2}{FA^2} = \frac{EC \cdot EB}{ED \cdot ER} \Rightarrow \frac{BE^3}{BF^3} = \frac{CE}{DE}. \end{aligned}$$

d) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EBF . Do tứ giác $BMKN$ là hình vuông nên BK là phân giác của $\widehat{EBF}$, do đó $I \in BK$. Kẻ $IJ \perp BE, IS \perp BF$, ($J \in BE, S \in BF$).

$$\text{Ta thấy } IS \parallel KN \Rightarrow \frac{BK}{BI} = \frac{KN}{IS} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Mà } \frac{BK}{BI} = \frac{BI + IK}{BI} = 1 + \frac{IK}{IB} \Rightarrow \frac{IK}{IB} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Mặt khác } FI \text{ là phân giác của góc } \widehat{BFE} \text{ nên } \frac{FK}{FB} = \frac{IK}{IB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow FB^2 = 2FK^2.$$

$$\text{Tương tự ta có } EB^2 = 2EK^2 \Rightarrow EF^2 = EB^2 + FB^2 = 2(EK^2 + FK^2) \Rightarrow (EK + KF)^2 = 2(EK^2 + FK^2) \Rightarrow (EK - FK)^2 = 0 \Rightarrow EK = FK.$$

Suy ra tam giác EBF vuông cân tại $B \Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{BFE} = 45^\circ$.

□

————— HẾT —————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 18

ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN 9 NĂM
HỌC 2012-2013, TỈNH HÀ TĨNH

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1.

- a) Tính giá trị của biểu thức $M = (x - y)^3 + 3(x - y)(xy + 1)$ biết

$$x = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}; y = \sqrt[3]{17 + 12\sqrt{2}} - \sqrt[3]{17 - 12\sqrt{2}}.$$

- b) Giải phương trình

$$\frac{2x}{x^2 - x + 1} - \frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{5}{3}.$$

Lời giải.

- a) Áp dụng biến đổi $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$, ta có:

$$x^3 = 4\sqrt{2} - 3x \Rightarrow x^3 + 3x = 4\sqrt{2}$$

$$y^3 = 24\sqrt{2} - 3y \Rightarrow y^3 + 3y = 24\sqrt{2}$$

Trừ từng vế hai đẳng thức trên ta được: $x^3 - y^3 + 3(x - y) = -20\sqrt{2}$. Suy ra $M = -20\sqrt{2}$

- b) Ta thấy $x^2 + x + 1; x^2 - x + 1$ luôn dương và $x = 0$ không là nghiệm của phương trình đã cho. Do đó với $t = x + \frac{1}{x}$, phương trình đã cho trở thành

$$\frac{2}{t-1} - \frac{1}{t+1} = \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 - 3t - 14 = 0 (t \neq \pm 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được nghiệm của phương trình đã cho là $x = 1$.

□

Câu 2.

- a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3 = 4x \\ x^3 + 12x + y^3 = 6x^2 + 9 \end{cases}$$
- b) Tìm các số tự nhiên a, b, c phân biệt sao cho biểu thức sau nhận giá trị nguyên
- $$P = \frac{(ab-1)(bc-1)(ca-1)}{abc}.$$

Lời giải.

- a) Nhân cả hai vế phương trình thứ nhất của hệ với 3 ta được

$$9 = 12x - 3x^2 - 3y^2.$$

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 3(x^2 - y^2) \\ \Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2 - 3x - 3y) &= 0 \end{aligned}$$

- *) Với $x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y$ thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(x-1)^2 + 1 &= 0, (L) \end{aligned}$$

- *) Với $x^2 - xy + y^2 - 3x - 3y = 0$, trừ theo từng vế với phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$\begin{aligned} xy - x - 3y + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-3)(y-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1. \end{cases} \end{aligned}$$

Do đó hệ có hai nghiệm $(3; 0)$ và $(2; 1)$.

- b) Ta có $P = abc - (a + b + c) + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{abc}$.

Do a, b, c là các số tự nhiên nên P là số nguyên khi và chỉ khi $M = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{abc}$ là số nguyên.

Do a, b, c có vai trò như nhau, không mất tính tổng quát ta giả thiết $a < b < c$, suy ra $a \geq 1; b \geq 2; c \geq 3$; suy ra

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{abc} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 2. \\ \Rightarrow 0 &< M < 2 \Rightarrow M = 1, (M \in \mathbb{Z}) \\ \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{abc} &= 1 \\ \Rightarrow a + b + c &= (a-1)(b-1)(c-1) + 2(*) \end{aligned}$$

Nếu $(a-1)(b-1) \geq 4$ thì với $a < b < c$ ta có $3c > a+b+c \Rightarrow 3c > (a-1)(b-1)(c-1+2) \Rightarrow 3c > 4(c-1) + 2 \Rightarrow 3c > 4c - 2 \Rightarrow c < 2$ (Trái với ĐK $c \geq 3$)

Do đó $a+b+c \geq 6$ nên từ (*) suy ra $a-1 > 0$, suy ra $b-1 > 1$, suy ra $(a-1)(b-1)$ chỉ có thể nhận giá trị là 2 hoặc 3. Từ đó ta tìm được bộ số $(a; b; c)$ thỏa mãn là $(2; 3; 5)$.

Vậy các bộ số tự nhiên phân biệt thỏa mãn bài toán gồm các hoán vị của $(2; 3; 5)$. Khi đó $P = 21$.

□

Câu 3. Tam giác ABC có chu vi bằng 1; các cạnh a, b, c thỏa mãn đẳng thức

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} = \frac{3}{2}.$$

Chứng minh tam giác ABC đều.

Lời giải.

Với a, b, c dương và $a+b+c=1$ ta có

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{3}{2}$$

Áp dụng BĐT Nesbit ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hay tam giác ABC đều. □

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi D là trung điểm của cạnh BC . Lấy điểm M bất kỳ trên đoạn AD (M không trùng với A). Gọi N, P theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh AB, AC và H là hình chiếu vuông góc của N lên đường thẳng PD .

- Chứng minh AH vuông góc với BH .
- Đường thẳng qua B song song với AD cắt đường trung tuyến của AB tại I . Chứng minh ba điểm H, N, I thẳng hàng.

Lời giải.

-

Từ giả thiết ta có AD là trung trực của BC và là phân giác của $\widehat{BAC}$. Từ đó ta cũng có $MNAP$ là hình vuông. Mặt khác do

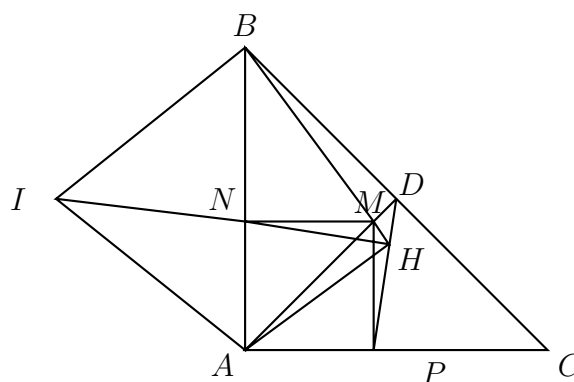
$$\widehat{NAP} + \widehat{NHP} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Nên tứ giác $ANHP$ nội tiếp đường tròn đường kính NP .

Suy ra $\widehat{AHP} = \widehat{ANP} = 45^\circ$ (cùng chắn cung $\widehat{AP}$)

Suy ra $\widehat{AHP} = \widehat{ABD} = 45^\circ \Rightarrow ABDH$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{AHB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$

hay $AH \perp BH$.



- b) Theo phần a) thì M, N, A, P, H cùng thuộc đường tròn đường kính AM và đường kính NP .

Suy ra $\widehat{AHM} = 90^\circ = \widehat{AHB} \Rightarrow H, M, B$ thẳng hàng.

Suy ra $\widehat{BHN} = \widehat{MHN} = \widehat{MAN} = 45^\circ$ (1) (cùng chắn $\widehat{MN}$)

Vì $BI \parallel AD$ nên $BI \perp BC \Rightarrow \widehat{ABI} = 45^\circ$.

Cùng với giả thiết ta có $\triangle ABC$ vuông cân tại I suy ra $\widehat{BAI} = 45^\circ$

Ta có $\widehat{AIB} + \widehat{AHB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $AIBH$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{BHI} = \widehat{BAI} = 45^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BHI} = \widehat{BHN}$. Mặt khác do cách dựng ta có N và I cùng nằm về một phía của BH suy ra H, N, I thẳng hàng.

□

Câu 5. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F = \frac{x^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{y^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{z^4}{(z^2 + x^2)(z + x)}.$$

Lời giải.

Ta nhận thấy

$$\begin{aligned} F &= \frac{x^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{y^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{z^4}{(z^2 + x^2)(z + x)} \\ \Leftrightarrow F &= \frac{y^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{z^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{x^4}{(z^2 + x^2)(z + x)}. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow F = \frac{1}{2} \left(\frac{x^4 + y^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{y^4 + z^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{z^4 + x^4}{(z^2 + x^2)(z + x)} \right)$$

Áp dụng BĐT $a^2 + b^2 \geq \frac{(a + b)^2}{2}$ ta có

$$\begin{aligned} F &\geq \frac{1}{4} \left(\frac{(x^4 + y^4)^2}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{(y^4 + z^4)^2}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{(z^4 + x^4)^2}{(z^2 + x^2)(z + x)} \right) \\ \Leftrightarrow F &\geq \frac{1}{4} \left(\frac{x^2 + y^2}{x + y} \frac{y^2 + z^2}{y + z} \frac{z^2 + x^2}{z + x} \right) \geq \frac{1}{8} \left(\frac{(x + y)^2}{x + y} + \frac{(y + z)^2}{y + z} + \frac{(z + x)^2}{z + x} \right) \\ \Leftrightarrow F &= \frac{1}{4}(x + y + z) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Vậy F đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{4}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

□

—————HẾT—————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 19

ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2012 - 2013, KIÊN
GIANG

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1.

- a) Tìm m để hàm số $y = (m^2 - 2m)x + m^2 - 1$ nghịch biến và đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3.
- b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = 5x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2xy - z - 1$.
- c) Cho $x + y = -5$ và $x^2 + y^2 = 11$. Tính $x^3 + y^3$.

Lời giải.

- a) Hàm số $y = (m^2 - 2m)x + m^2 - 1$ nghịch biến khi và chỉ khi

$$m^2 - 2m < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2 \quad (1).$$

$$\begin{cases} m < 0 \\ m - 2 > 0 \end{cases} \quad (\text{Loại})$$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 $\Leftrightarrow m^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow m = \pm 2$ (2).

Từ (1) và (2) ta thấy $m \in \emptyset$.

- b) $M = 5x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2xy - z - 1 = (x - y)^2 + (2x - 1)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4}$.
 Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$.

- c) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) = -5(11 - xy)$.

Mà $x + y = -5 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 25 \Rightarrow xy = 7 \Rightarrow x^3 + y^3 = -20$.

□

Câu 2.

- a) Rút gọn $A = \frac{x^2 + 5x + 6 + x\sqrt{9 - x^2}}{3x - x^2 + (x + 2)\sqrt{9 - x^2}} : 2\sqrt{1 + \frac{2x}{3 - x}}$.

- b) Cho a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$. Tính giá trị của biểu thức $Q = (a^{27} + b^{27})(b^{41} + c^{41})(c^{2013} + a^{2013})$.

Lời giải.

- a) Điều kiện xác định $-3 < x < 3$.

$$A = \frac{(x+3)(x+2) + x\sqrt{3+x}\sqrt{3-x}}{x(3-x) + (x+2)\sqrt{3+x}\sqrt{3-x}} : 2\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}$$

$$= \frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}} \cdot \frac{(x+2)\sqrt{3+x} + x\sqrt{3-x}}{x\sqrt{3-x} + (x+2)\sqrt{3+x}} : 2\sqrt{\frac{3+x}{3-x}} = \frac{1}{2}.$$

- b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = -\frac{a+b}{c(a+b+c)}$
 $\Rightarrow (a+b)[c(a+b+c) + ab] = 0 \Rightarrow (a+b)[c(a+c) + bc + ab] = 0$

$$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -b \\ b = -c \\ c = -a \end{cases}$$

Thay vào Q ta được $Q = 0$.

□

Câu 3.

- a) Giải phương trình $\sqrt[3]{x+10} + \sqrt[3]{17-x} = 3$.

- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\frac{2x-3}{y+5}} + \sqrt{\frac{y+5}{2x-3}} = 2 \\ 3x+2y = 19 \end{cases}$ (với $x > \frac{3}{2}, y > -5$).

Lời giải.

- a) $\sqrt[3]{x+10} + \sqrt[3]{17-x} = 3$

$$\Leftrightarrow x+10+17-x+3\sqrt[3]{(x+10)(17-x)} [\sqrt[3]{x+10} + \sqrt[3]{17-x}] = 27 \Leftrightarrow (x+10)(17-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ x = 17. \end{cases}$$

- b) Đặt $a = \sqrt{\frac{2x-3}{y+5}}$ ($a > 0$). Ta có $a + \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 2x-3 = y+5 \Rightarrow 2x-y = 8$.

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} 2x-y = 8 \\ 3x+2y = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2. \end{cases}$$

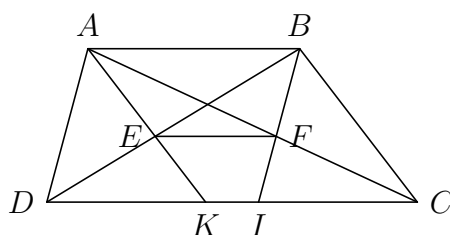
□

Câu 4. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn là CD . Qua A vẽ $AK \parallel BC$ ($K \in CD$) và qua B kẻ $BI \parallel AD$ ($I \in CD$); BI cắt AC tại F , AK cắt BD tại E .

a) Chứng minh $KD = CI$ và $EF \parallel AB$.

b) Chứng minh $AB^2 = CD \cdot EF$.

Lời giải.



a) Ta có $ABID$ và $ABCK$ là các hình bình hành $\Rightarrow DI = CK = AB$.

- Nếu I nằm giữa D và $K \Rightarrow K$ nằm giữa I và C .

$$\text{Ta có } DK = DI + IK = CK + IK = CI.$$

- Nếu K nằm giữa D và $I \Rightarrow I$ nằm giữa K và C .

$$\text{Ta có } DK = DI - IK = CK - IK = CI.$$

Xét $\triangle AEB$ và $\triangle KED$ có

$$\widehat{EAB} = \widehat{EKD}, \widehat{DEK} = \widehat{AEB} \Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle KED \Rightarrow \frac{AE}{EK} = \frac{AB}{KD}.$$

$$\text{Tương tự } \triangle AFB \sim \triangle CFI \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{AB}{CI}.$$

$$\text{Mà } KD = CI \Rightarrow \frac{AE}{EK} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow EF \parallel KC \text{ (định lí Talet đảo)}.$$

$$\text{b) Ta có } \triangle KED \sim \triangle AEB \Rightarrow \frac{DK}{AB} = \frac{DE}{EB} \Rightarrow \frac{DK + AB}{AB} = \frac{DE + EB}{EB}$$

$$\Rightarrow \frac{DK + KC}{AB} = \frac{BD}{EB} \Rightarrow \frac{DC}{AB} = \frac{BD}{EB} \quad (1).$$

$$\text{Lại có } EF \parallel DI \Rightarrow \frac{BD}{EB} = \frac{DI}{EF} \Rightarrow \frac{BD}{EB} = \frac{AB}{EF} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \frac{DC}{AB} = \frac{AB}{EF} \Rightarrow AB^2 = CD \cdot EF.$$

□

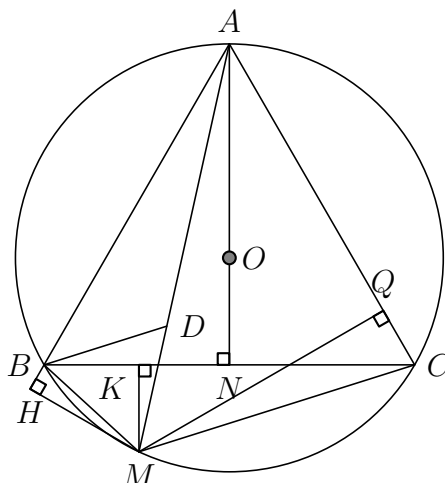
Câu 5. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi M là điểm di động trên cung nhỏ BC của đường tròn đó.

a) Chứng minh $BM + MC = MA$.

b) Xác định vị trí của điểm M để tổng $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất.

- c) Gọi H, K, Q lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB, BC, CA . Đặt diện tích tam giác ABC là S và diện tích tam giác MBC là S' . Chứng minh rằng $MH + MK + MQ = \frac{2\sqrt{3}(S + 2S')}{3R}$ khi M chạy trên cung nhỏ BC .

Lời giải.



- a) Trên tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MB \Rightarrow \triangle MBD$ cân tại M . Mà $\widehat{BMD} = 60^\circ$ (do chắn cung $\widehat{AB}$ và $\triangle ABC$ đều) nên $\triangle BMD$ đều $\Rightarrow MB = BD$.
 Lại có $\widehat{MBC} + \widehat{CBD} = 60^\circ = \widehat{CBD} + \widehat{DBA} \Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{DBA}$.
 Xét $\triangle MBC$ và $\triangle DBA$ có $MB = DB$, $\widehat{MBC} = \widehat{DBA}$, $BC = AB$ nên $\triangle MBC = \triangle DBA \Rightarrow MC = DA \Rightarrow MA = MD + DA = MB + MC$.
- b) Ta có $MA + MB + MC = 2MA \leq 4R$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi AM là đường kính của đường tròn $(O; R) \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{BC}$.
- c) Gọi N là trung điểm $BC \Rightarrow OA = \frac{2}{3}AN \Rightarrow AN = \frac{3R}{2}$. Xét tam giác ANB có
 $AB^2 = AN^2 + NB^2 = \frac{9R^2}{4} + \frac{AB^2}{4} \Rightarrow AB^2 = 3R^2 \Rightarrow AB = R\sqrt{3}$.
 Mà $\frac{MH \cdot AB}{2} + \frac{MK \cdot BC}{2} + \frac{MQ \cdot AC}{2} = S_{\triangle MAB} + S_{\triangle MBC} + S_{\triangle MAC}$
 $\Rightarrow AB(MH + MK + MQ) = 2(S + S') \Rightarrow MH + MK + MQ = \frac{2\sqrt{3}(S + 2S')}{3R}$.

□

HẾT

TOÁN THCS VIỆT NAM
 ĐỀ THI HSG TOÁN 9
 ĐỀ SỐ 20

ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GIỎI
 NĂM HỌC 2012-2013 TỈNH
 QUẢNG NINH

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1. Minh] Chứng minh đẳng thức $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

Lời giải.

Đặt $\sqrt[3]{2} = a \Leftrightarrow 2 = a^3$.

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\sqrt[3]{a-1} = \frac{1-a+a^2}{\sqrt[3]{9}}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{9(a-1)} = a^2 - a + 1 \Leftrightarrow (a^2 - a + 1)^3 = 9(a-1)$.

Ta có

$$\begin{aligned} (a^2 - a + 1)^3 &= (a^2 - a + 1)^2(a^2 - a + 1) = (a^4 + a^2 + 1 - 2a^3 - 2a + 2a^2)(a^2 - a + 1) \\ &= (2a + 3a^2 + 1 - 4 - 2a)(a^2 - a + 1) = 3(a^2 - 1)(a^2 - a + 1) \\ &= 3(a-1)(a+1)(a^2 - a + 1) = 3(a-1)(a^3 + 1) \\ &= 9(a-1) \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

□

Câu 2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(2013y - 2012) = 1 \\ x(y^2 + 2012) = 2013. \end{cases}$$

Lời giải.

Dễ thấy $x \neq 0$ nên hệ phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} 2013y - 2012 = \frac{1}{x^2} \\ y^2 + 2012 = \frac{2013}{x}. \end{cases}$$

Đặt $\frac{1}{x} = t$, hệ trở thành
$$\begin{cases} t^2 - 2013y + 2012 = 0 \\ y^2 - 2013t + 2012 = 0. \end{cases}$$

Trừ vế với vế của phương trình thứ nhất cho phương trình thứ hai ta được

$$t^2 - y^2 - 2013y + 2013t = 0 \Leftrightarrow (t-y)(t+y+2013) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = t \\ y = -t - 2013. \end{cases}$$

- Trường hợp 1: $y = t$.

Ta có phương trình $t^2 - 2013t + 2012 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2012. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$ và $(x; y) = \left(\frac{1}{2012}; 2012\right)$.

- Trường hợp 2: $y = -t - 2013$.

Ta có phương trình $t^2 - 2013(-t - 2013) + 2012 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 + 2013t + 4054181 = 0$ (vô nghiệm do $\Delta < 0$).

Vậy hệ phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm $(x; y)$ là $(1; 1)$ và $\left(\frac{1}{2012}; 2012\right)$. $\square$

Câu 3. Cho hàm số bậc nhất $y = mx + m - 1$ (*) (với m là tham số).

- Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số (*) tạo với trục tọa độ Oxy một tam giác có diện tích bằng 2.
- Chứng minh rằng đồ thị của hàm số (*) luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m .

Lời giải.

- Vì (*) là hàm số bậc nhất nên $m \neq 0$.

Đồ thị của (*) cắt trục tung tại điểm $A(0; m-1)$ và cắt trục hoành tại điểm $B\left(\frac{1-m}{m}; 0\right)$. OAB tạo thành tam giác khi và chỉ khi $m \neq 1$.

Khi đó ta có

$$S_{ABC} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA \cdot OB = 2 \Leftrightarrow OA \cdot OB = 4$$

$$\Leftrightarrow |m-1| \cdot \left|\frac{1-m}{m}\right| = 4 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 4|m| \quad (1).$$

- Trường hợp 1: $m > 0$.

$$(1) \text{ trở thành } m^2 - 2m + 1 = 4m \Leftrightarrow m^2 - 6m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 - 2\sqrt{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ m = 3 + 2\sqrt{2} \text{ (thỏa mãn)}. \end{cases}$$

- Trường hợp 2: $m < 0$.

$$(1) \text{ trở thành } m^2 - 2m + 1 = -4m \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy với $m \in \{-1; 3 + 2\sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2}\}$ thì đồ thị của hàm số (*) tạo với các trục tọa độ Oxy một tam giác có diện tích bằng 2.

- $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định thuộc đồ thị của hàm số (*) khi và chỉ khi

$$y_0 = mx_0 + m - 1 \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 1)m - (y_0 + 1) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = 0 \\ y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1. \end{cases}$$

Vậy đồ thị của hàm số (*) luôn đi qua điểm cố định $M(-1; -1)$ với mọi giá trị của m .

□

Câu 4. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{1}{x^3 + y^3 + 1} + \frac{1}{y^3 + z^3 + 1} + \frac{1}{z^3 + x^3 + 1}$.

Lời giải.

Với $\forall x, y \in \mathbb{R}$, ta có $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - xy + y^2 \geq xy$.

Mà $x > 0, y > 0$ nên $x + y > 0$.

Suy ra $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \geq (x + y)xy$.

$\Rightarrow x^3 + y^3 + 1 = x^3 + y^3 + xyz \geq (x + y)xy + xyz = xy(x + y + z) > 0$.

Chúng minh tương tự ta có

$$y^3 + z^3 + 1 \geq yz(x + y + z) > 0$$

$$z^3 + x^3 + 1 \geq zx(x + y + z) > 0$$

Vậy ta có $A \leq \frac{1}{xy(x + y + z)} + \frac{1}{yz(x + y + z)} + \frac{1}{zx(x + y + z)} = \frac{x + y + z}{xyz(x + y + z)} = \frac{1}{xyz} = 1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là 1 khi $x = y = z = 1$.

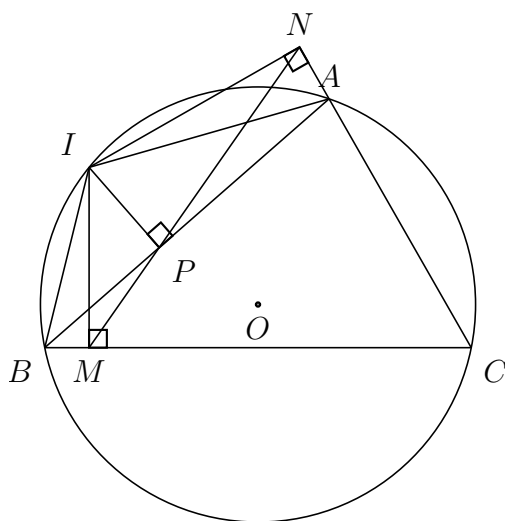
□

Câu 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi I là một điểm trên cung nhỏ AB (I không trùng với A và B). Gọi M, N, P theo thứ tự là hình chiếu của điểm I trên các đường thẳng BC, AC, AB .

a) Chứng minh rằng ba điểm M, N, P thẳng hàng.

b) Xác định vị trí của điểm I để đoạn thẳng MN có độ dài lớn nhất.

Lời giải.



a) Xét tứ giác $IPAN$ có $\widehat{IPA} + \widehat{INA} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $IPAN$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{IPN} = \widehat{IAN}$ (cùng chắn cung IN).

Xét tứ giác $IPMB$ có $\widehat{IPB} = \widehat{IMB} = 90^\circ$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $IPMB$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{IBM} + \widehat{IPM} = 180^\circ$.

Mà $\widehat{IBM} + \widehat{IAC} = 180^\circ$ (do tứ giác $IACB$ là tứ giác nội tiếp).

$\Rightarrow \widehat{IPM} = \widehat{IAC}$.

$\Rightarrow \widehat{IPM} + \widehat{IPN} = \widehat{IAC} + \widehat{IAN} = 180^\circ$.

Vậy M, N, P là ba điểm thẳng hàng.

b) Vì tứ giác $IPMB$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{IBP} = \widehat{IMP}$ (cùng chắn cung IP).

Lại có tứ giác $IPAN$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{IAP} = \widehat{INP}$ (cùng chắn cung IP).

Xét $\triangle IBA$ và $\triangle IMN$ có

$$\begin{cases} \widehat{IBA} = \widehat{IMN} \\ \widehat{IAB} = \widehat{INM} \end{cases} \Rightarrow \triangle IBA \sim \triangle IMN \text{ (g.g).}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{IM}{IB}.$$

Mà tam giác IBM vuông tại M nên $IM \leq IB$ hay $\frac{IM}{IB} \leq 1$.

Vậy $MN \leq AB$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} M \equiv B \\ N \equiv A \end{cases} \Leftrightarrow \widehat{IAC} = \widehat{IBC} = 90^\circ$$

$\Leftrightarrow CI$ là đường kính của (O) .

Vậy MN lớn nhất bằng AB khi và chỉ khi I là điểm đối xứng với C qua O .



Câu 6. Giải phương trình sau $(x+3)\sqrt{(4-x)(12+x)} + x = 28$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $-12 \leq x \leq 4$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x+3 = u \\ \sqrt{(4-x)(12+x)} = v \end{cases} \quad (v \geq 0).$$

Phương trình đã cho trở thành $uv = 28 - x$ (1).

$$\text{Ta có } u^2 + v^2 - 1 = x^2 + 6x + 9 + 48 - 8x - x^2 - 1 = 56 - 2x = 2(28 - x) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có $u^2 + v^2 - 1 = 2uv \Leftrightarrow (u-v)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u-v = 1 \\ u-v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = u-1 \\ v = u+1. \end{cases}$$

- Trường hợp 1: $v = u - 1$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{(4-x)(12+x)} = x+2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 48 - 8x - x^2 = x^2 + 4x + 4 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 12x - 44 = 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 + \sqrt{31} \text{ (thỏa mãn).}$$

- Trường hợp 2: $v = u + 1$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{(4-x)(12+x)} = x+4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 48 - 8x - x^2 = x^2 + 8x + 16 \\ x \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 16x - 32 = 0 \\ x \geq -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -4 + 4\sqrt{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{-3 + \sqrt{31}; -4 + 4\sqrt{2}\}$.



HẾT

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 21

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
TOÁN 9 NĂM HỌC 2012-2013,
TIỀN GIANG

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1.

- 1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2(x^2 - x + y) \\ y^3 + 1 = 2(y^2 - y + x) \end{cases}$$
- 2) Cho phương trình $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$ (1).
- a) Tìm m để (1) có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa
$$\begin{cases} x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \\ x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1 \end{cases}$$
- b) Giải phương trình (1) với m vừa tìm được ở a).

Lời giải.

- 1) Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2(x^2 - x + y) & (1) \\ y^3 + 1 = 2(y^2 - y + x) & (2) \end{cases}$$

Trừ vế theo vế hai phương trình (1) và (2), ta được: $x^3 - y^3 = 2(x^2 - y^2) - 4(x - y)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 2(x + y) - 4 \end{cases}$$

- $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$, thay vào (1), ta được phương trình:

$$x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

- $x^2 + xy + y^2 = 2(x + y) - 4 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2(x + y) - xy + 4 = 0$.

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$, ta được $\begin{cases} S^2 \geq 4P \\ S^2 - 2S - P + 4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow S^2 \geq 4(S^2 - 2S + 4) \Rightarrow 3\left(S - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{32}{3} \leq 0 \text{ (không xảy ra)}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ (1; 1), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right\}$.

2)

a) Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$), phương trình (1) trở thành $t^2 - 2mt + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 2m - 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Yêu cầu bài toán} &\Leftrightarrow \begin{cases} t_2 > 0 \\ t_1 = 9t_2 \text{ (do } \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = \sqrt{t_2} - (-\sqrt{t_2})) \\ t_2 = 9t_1 \text{ (do } \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} - (-\sqrt{t_1})) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{9} \\ m = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $m = 5$ hoặc $m = \frac{5}{9}$ là các giá trị cần tìm.

b) Với $m = \frac{5}{9}$, phương trình (1) trở thành:

$$x^4 - \frac{10}{9}x^2 + \frac{1}{9} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{1}{3} \\ x_3 = \frac{1}{3} \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Vậy với $m = \frac{5}{9}$, phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ -1; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 1 \right\}$.

Với $m = 5$, phương trình (1) trở thành:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

Vậy với $m = 5$, phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-3; -1; 1; 3\}$.

□

Câu 2. Cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = x + m$. Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB là tam giác vuông.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $x^2 - x - m = 0$ (1).

$$\text{Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác } 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 1 + 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Khi đó, ta có (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ với x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình (1).

Vì vai trò của A và B như nhau nên tam giác OAB là tam giác vuông khi và chỉ khi tam giác OAB là tam giác vuông tại A hoặc vuông tại O .

$$\text{a) Tam giác } OAB \text{ vuông tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} OA \perp (d) \\ y_A = x_A^2 \\ y_A = x_A + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -1 \\ y_A = x_A^2 \\ y_A = x_A + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(-1; 1) \\ B(2; 4) \\ m = 2. \end{cases}$$

$$\text{b) Tam giác } OAB \text{ vuông tại } O \Leftrightarrow \begin{cases} OA \perp OB \\ y_A = x_A^2; y_B = x_B^2 \\ x_A \cdot x_B = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A \cdot x_B = -1 \\ y_A = x_A^2; y_B = x_B^2 \\ x_A \cdot x_B = -m \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \\ B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \\ m = 1. \end{cases}$$

Vậy $m = 2$ hoặc $m = 1$ là các giá trị cần tìm. $\square$

Câu 3.

- a) Cho 4 số a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = 2$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 1$.
- b) Cho $m \neq -1$ và $a^3 - 3a^2 + 3a(m+1) - (m+1)^2 = 0$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của a .

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 &\geq 0, \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \left(d - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \\ \Rightarrow a^2 &\geq a - \frac{1}{4}, b^2 \geq b - \frac{1}{4}, c^2 \geq c - \frac{1}{4}, d^2 \geq d - \frac{1}{4}. \\ \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &\geq (a + b + c + d) - 1. \\ \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &\geq 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: Phương trình } &\Leftrightarrow (m+1)a^3 - 3(m+1)a^2 + 3(m+1)a - (m+1)^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow a^3 - 3(m+1)a^2 + 3(m+1)^2a - (m+1)^3 = -ma^3 \\ &\Leftrightarrow [a - (m+1)]^3 = -ma^3 \\ &\Leftrightarrow a - (m+1) = -\sqrt[3]{m} \cdot a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow a &= \frac{m+1}{\sqrt[3]{m}+1} \\ \Leftrightarrow a &= \sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{m} + 1 \\ \Leftrightarrow a &= \left(\sqrt[3]{m} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của a là $\frac{3}{4}$ khi $m = \frac{1}{8}$.

□

Câu 4. Chứng minh rằng $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ với $n \in \mathbb{Z}; n \geq 1$.

Lời giải.

Đặt $g(n) = (2n)^2$; $f(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$. Ta tìm các số a, b, c, d sao cho $f(n) - f(n-1) = g(n)$.

Ta có: $f(n) - f(n-1) = g(n)$

$$\Leftrightarrow 3an^2 + (2b - 3a)n + a - b + c = 4n^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 4 \\ 2b - 3a = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = 2 \\ c = \frac{2}{3} \\ d \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Suy ra $f(n) = \frac{4}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{2}{3}n + d$ (d tùy ý).

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(1) - f(0) = g(1) \\ f(2) - f(1) = g(2) \\ f(3) - f(2) = g(3) \\ \vdots \\ f(n) - f(n-1) = g(n) \end{cases}$$

Suy ra $f(n) - f(0) = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{2}{3}n + d - d = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2$$

$$\Leftrightarrow 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

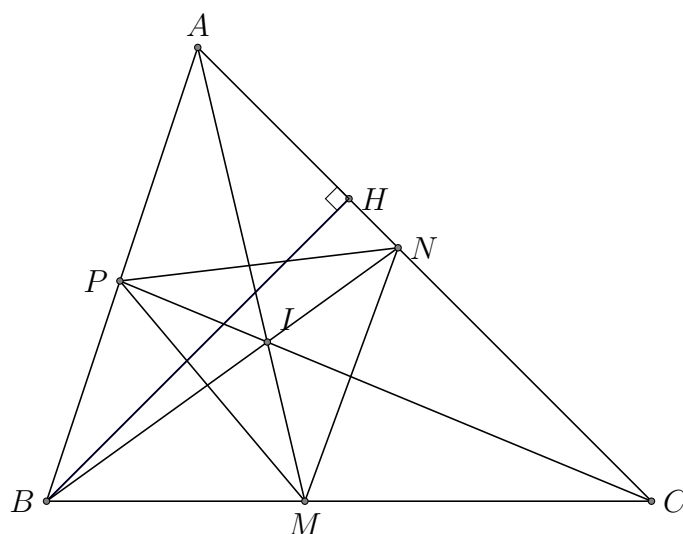
□

Câu 5. Cho tam giác ABC có các phân giác trong của các góc nhọn $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{CBA}$ theo thứ tự cắt các cạnh đối tại các điểm M, N, P . Đặt $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$; $S_{\triangle MNP}$, $S_{\triangle ABC}$ theo thứ tự là diện tích của các tam giác MNP và tam giác ABC .

a) Chứng minh rằng $\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$

b) Tìm giá trị lớn nhất của $\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}}.$

Lời giải.



- a) Trong tam giác ABC , kẻ đường cao AH . Ta có: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}AC \cdot AB \cdot \sin \widehat{BAC}$.

Tương tự, ta có: $S_{\triangle ANP} = \frac{1}{2}AN \cdot AP \cdot \sin \widehat{BAC}$.

Suy ra $\frac{S_{\triangle ANP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AN \cdot AP}{bc}$.

Mà $\frac{AN}{b - AN} = \frac{c}{a} \Rightarrow AN = \frac{bc}{a + c}$.

Tương tự, ta có: $AP = \frac{bc}{a + b}$.

Vậy $\frac{S_{\triangle ANP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{bc}{(a + b)(a + c)}$.

Tương tự, ta có: $\frac{S_{\triangle CMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{ca}{(b + c)(b + a)}$, $\frac{S_{\triangle BMP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{ab}{(c + a)(c + b)}$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}} &= \frac{S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ANP} - S_{\triangle CMN} - S_{\triangle BMP}}{S_{\triangle ABC}} \\ &= 1 - \frac{S_{\triangle ANP}}{S_{\triangle ABC}} - \frac{S_{\triangle CMN}}{S_{\triangle ABC}} - \frac{S_{\triangle BMP}}{S_{\triangle ABC}} \\ &= 1 - \frac{bc}{(a + b)(a + c)} - \frac{ca}{(b + c)(b + a)} - \frac{ab}{(c + a)(c + b)} \\ &= \frac{2abc}{(a + b)(b + c)(c + a)}. \end{aligned}$$

- b) Ta có: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Tương tự, ta có: $b + c \geq 2\sqrt{bc}$; $c + a \geq 2\sqrt{ca}$.

Suy ra $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

Vậy $\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}} \leq \frac{1}{4}$.

Suy ra giá trị lớn nhất của $\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}}$ là $\frac{1}{4}$ khi tam giác ABC là tam giác đều.

□

HẾT

TOÁN THCS VIỆT NAM
 ĐỀ THI HSG TOÁN 9
 ĐỀ SỐ 22

ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GIỎI
 NĂM HỌC 2013-2014, TỈNH BẮC
 NINH

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1. Cho biểu thức: $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$ ($x > 0, x \neq 1$).

- a) Rút gọn P .
 b) Tìm giá trị của x để $P = 3$.

Lời giải.

- a) Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} - 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} + \frac{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x + \sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - 2\sqrt{x} - 1 + 2(\sqrt{x} + 1) \\ &= x - \sqrt{x} + 1. \end{aligned}$$

- b) $P = 3 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 3 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0$.

$$\text{Đặt } \sqrt{x} = t, t \geq 0 \text{ ta được } t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 2 \end{cases}$$

Với $t = 2$ ta được $\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy với $x = 4$ thì $P = 3$.

□

Câu 2. Cho phương trình $x^2 + (4m+1)x + 2(m-4) = 0$ (1) (x là ẩn số, m là tham số).

- a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .
 b) Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của (1). Tìm m để $|x_1 - x_2| = 17$.

Lời giải.

a) Có $\Delta = (4m + 1)^2 - 8(m - 4) = 16m^2 + 8m + 1 - 8m + 32 = 16m^2 + 33$.

Vì $\Delta = 16m^2 + 33 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

b) Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m nên theo định lý Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(4m + 1) \\ x_1 x_2 = 2(m - 4). \end{cases}$$

Theo yêu cầu bài toán $|x_1 - x_2| = 17 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 289 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 289$
 $\Leftrightarrow (4m + 1)^2 - 8(m - 4) = 289 \Leftrightarrow 16m^2 + 33 = 289 \Leftrightarrow m = \pm 4$.

Vậy $m = \pm 4$ là giá trị cần tìm.

□

Câu 3.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 2xy = 1. \end{cases}$

b) Cho các số thực m, n, p thỏa mãn $n^2 + np + p^2 = 1 - \frac{3m^2}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = m + n + p$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{cases} 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 \quad (1) \\ 4x^2 + 2y^2 - 4xy = 2 \quad (2). \end{cases}$$

Trừ vế với vế của hai phương trình ta được

$$y^4 - 2y^2 + 1 - 4xy^3 + 4xy = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 1)(y^2 - 1 - 4xy) = 0.$$

- Nếu $y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$ thay vào (1) ta được các nghiệm $(x; y)$ là $(0; 1)$, $(1; 1)$, $(-1; -1)$, $(0; -1)$.
- Nếu $y^2 - 1 - 4xy = 0 \Leftrightarrow x = \frac{y}{4} - \frac{1}{4y}$ (do $y = 0$ không thỏa mãn). Thay vào (2) ta được:

$$4\left(\frac{y}{4} - \frac{1}{4y}\right)^2 + 2y^2 - 4y\left(\frac{y}{4} - \frac{1}{4y}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^2} + 2y^2 - y^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow 5y^4 - 6y^2 + 1 = 0.$$

Với $y^2 = 1 \Rightarrow x = 0$ ta được nghiệm $(x; y)$ là $(0; \pm 1)$.

Với $y^2 = \frac{1}{5}$ ta được nghiệm $(x; y)$ là $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{-1}{\sqrt{5}}\right); \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

b) Có $n^2 + np + p^2 = 1 - \frac{3m^2}{2}$

$$\Leftrightarrow (m+n+p)^2 + (m-p)^2 + (n-m)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow (m+n+p)^2 = 2 - (m-p)^2 - (n-m)^2 \leq 2 \Rightarrow S^2 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq S \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Khi đó } \max S = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = n = p = \frac{\sqrt{2}}{3}; \min S = -\sqrt{2} \Leftrightarrow m = n = p = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

□

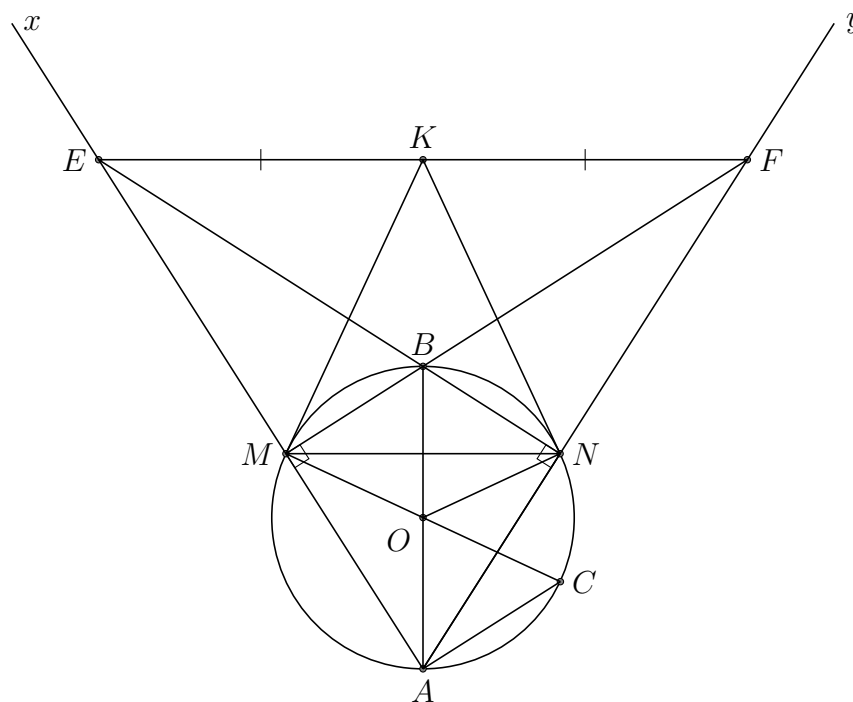
Câu 4. Cho đường tâm O đường kính AB cố định. Ax và Ay là hai tia thay đổi luôn tạo với nhau một góc 60° , nằm về hai phía của AB , cắt đường tròn (O) lần lượt tại M, N . Đường thẳng BN cắt Ax tại E , đường thẳng BM cắt Ay tại F . Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng EF .

a) Chứng minh rằng $\frac{EF}{AB} = \sqrt{3}$.

b) Chứng minh rằng $OMKN$ là tứ giác nội tiếp.

c) Khi tam giác AMN đều, gọi C là điểm di động trên cung nhỏ AN ($C \neq A, C \neq N$). Đường thẳng qua M và vuông góc với AC cắt NC tại D . Xác định vị trí của điểm C để diện tích tam giác MCD là lớn nhất.

Lời giải.



- a) Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
 $\Rightarrow B$ là trực tâm $\triangle AEF \Rightarrow AB \perp EF$
 $\Rightarrow \widehat{NEF} = \widehat{NAB}$ (Cùng phụ với góc $\widehat{NFE}$).
 Khi đó suy ra $\triangle NEF \sim \triangle NAB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{EF}{AB} = \frac{NE}{NA} = \tan \widehat{NAE} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$.
- b) $\widehat{MON}$ là góc ở tâm chắn cung $MN \Rightarrow \widehat{MON} = 2\widehat{MAN} = 120^\circ$.
 $\widehat{EMF} = \widehat{ENF} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $MNFE$ nội tiếp đường tròn đường kính EF tâm K .
 $\Rightarrow \widehat{MKN} = 2\widehat{MEN} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.
 $\widehat{MON} + \widehat{MKN} = 180^\circ \Rightarrow OMKN$ là tứ giác nội tiếp.
- c) Gọi I là giao điểm của AC và MD . Ta có $\widehat{MCA} = \widehat{NCM} = 60^\circ$.
 $\Rightarrow \triangle MCD$ có CI vừa là đường cao vừa là đường phân giác. Khi đó $\triangle MCD$ cân tại C .
 $\Rightarrow S_{MCD} = 2S_{MCI} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot MI \cdot CI = MI \cdot CI = (MC \cdot \sin 60^\circ)(MC \cdot \cos 60^\circ) = \frac{MC^2 \sqrt{3}}{4}$
 $\Rightarrow S_{MCD}$ lớn nhất $\Leftrightarrow MC$ lớn nhất $\Leftrightarrow MC$ là đường kính của (O) .

□

Câu 5 (Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi năm học 2013-2014 Tỉnh Bắc Ninh).

[6D1G10][8H2G3]

- a) Cho 2014 số nguyên dương không lớn hơn 2014 và có tổng bằng 4028. Chứng minh rằng từ 2014 số đó luôn chọn được các số mà tổng của chúng bằng 2014.

- b) Cho tam giác ABC có các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC, CA . Gọi giao điểm của AE với BF và CD lần lượt là Q, R , giao điểm của CD và BF là P . Biết diện tích bốn tam giác ADR, BEQ, CFP, PQR cùng bằng 1. Chứng minh rằng các tứ giác $AFPR, BDRQ, CEQP$ có diện tích bằng nhau.

Lời giải.

- a) Nếu 2014 số bằng nhau thì lấy 1007 số bất kỳ luôn có tổng là 2014.

Ta xét trường hợp trong 2014 số có ít nhất hai số khác nhau. Giả sử 2014 số là $n_1, n_2, \dots, n_{2014}$ và $n_1 \neq n_2$. Xét dãy gồm 2014 số:

$$n_1, n_2, n_1 + n_2, \dots, n_1 + n_2 + \dots + n_{2013}$$

Nếu có một số trong dãy chia hết cho 2014 thì số đó là 2014.

Nếu không có số nào trong dãy chia hết cho 2014 thì theo nguyên lý Dirichlet có hai số trong dãy có cùng số dư khi chia cho 2014.

Vậy ta được điều phải chứng minh.

- b) Do $S_{PQR} = S_{ADR} \Rightarrow S_{APQ} = S_{ADP} \Rightarrow D, Q$ cách đều $AP \Rightarrow DQ \parallel AP$.
 $\Rightarrow \triangle BQD \sim \triangle BPA \Rightarrow \frac{BP}{BQ} = \frac{AB}{BD} = \frac{AP}{QD} = \frac{BQ + QP}{BQ} = 1 + \frac{QP}{QB}$.

$$\text{Vì } \triangle ARP \sim \triangle QRD \Rightarrow \frac{AR}{QR} = \frac{AP}{QD} = \frac{RP}{RD}.$$

$$\text{Đặt } \frac{AR}{QR} = a, \frac{QB}{QP} = b, \frac{CP}{PR} = c.$$

$$\text{Từ } \frac{AR}{QR} = \frac{AP}{QD} = 1 + \frac{QP}{QB} \Rightarrow a = 1 + \frac{1}{b}.$$

$$\text{Chứng minh tương tự } b = 1 + \frac{1}{c}, c = 1 + \frac{1}{a}.$$

$$\text{Do đó } a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = b = c = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

$$\Rightarrow RD = \frac{2PR}{\sqrt{5} + 1}, \frac{RD}{CP} + \frac{PR}{CP} = \frac{2PR}{CP(\sqrt{5} + 1)} + \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow \frac{PD}{CP} = 1.$$

Suy ra P là trung điểm của CD .

$$\Rightarrow S_{BCP} = S_{BDP} \Rightarrow S_{CEQP} = S_{BDRQ}.$$

Chứng minh tương tự ta được $S_{CEQP} = S_{ARPF}$.

□

HẾT

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 23

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9
NĂM HỌC 2013-2014, NGHỊ
XUÂN, HÀ TĨNH

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1. Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Ta có $A = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - 1 + 3 - \sqrt{5} = 2$. □

Câu 2. Tìm x, y thỏa mãn $2x + y - 2\sqrt{xy} - 4\sqrt{x} + 4 = 0$.

Lời giải.

Điều kiện:
$$\begin{cases} x = 0; y \in \mathbb{R} \\ x > 0; y \geq 0. \end{cases}$$

- Với $x = 0$, ta được $y = -4$ (thỏa mãn).

- Với $x > 0, y \geq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} 2x + y - 2\sqrt{xy} - 4\sqrt{x} + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2\sqrt{xy} + y) + (x - 4\sqrt{x} + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} - 2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \\ \sqrt{x} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 4. & \text{ (thỏa mãn)} \end{aligned}$$

Vậy $(x; y) \in \{(0; -4); (4; 4)\}$. □

Câu 3. Giải phương trình nghiệm nguyên $5x^4 + y^2 - 4x^2y - 85 = 0$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $x^4 = 85 - (y - 2x^2)^2$.

$\Rightarrow x^4 \leq 85 < 4^4$. Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x^4 \in \{0^4; 1^4; 2^4; 3^4\}$.

- Với $x^4 = 0^4 \Rightarrow y^2 = 85$ (loại).
- Với $x^4 = 1^4 \Rightarrow (y - 2)^2 = 84$ (loại).
- Với $x^4 = 2^4 \Rightarrow (y - 8)^2 = 69$ (loại).

$$\bullet \text{ Với } x^4 = 3^4 \Rightarrow (y - 18)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y - 18 = 2 \\ y - 18 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 \\ y = 16. \end{cases}$$

Vậy phương trình có bốn nghiệm nguyên $(x; y) \in \{(3; 20), (-3; 20), (3; 16), (-3; 16)\}$. $\square$

Câu 4. Cho x, y, z là các số nguyên và

$$\begin{cases} P = (x + 2012)^5 + (2y - 2013)^5 + (3z + 2014)^5 \\ S = x + 2y + 3z + 2013. \end{cases}$$

Chứng minh rằng P chia hết cho 30 khi và chỉ khi S chia hết cho 30.

Lời giải.

$$\text{Đặt } a = x + 2012, b = 2y - 2013, c = 3z + 2014. \text{ Ta được } \begin{cases} P = a^5 + b^5 + c^5 \\ S = a + b + c \end{cases} \quad (a, b, c \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Xét } P - S = (a^5 - a) + (b^5 - b) + (c^5 - c).$$

Ta chứng minh được $m^5 - m$ chia hết cho 30. Thật vậy, ta có

$$m^5 - m = m(m^4 - 1) = m(m - 1)(m + 1)(m^2 + 1) = 5m(m - 1)(m + 1) + m(m - 1)(m + 1)(m - 2)(m + 2).$$

Mà $m(m - 1)(m + 1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho $2 \cdot 3 = 6$, nghĩa là $5m(m - 1)(m + 1)$ chia hết cho 30.

Lại có $m(m - 1)(m + 1)(m - 2)(m + 2)$ là tích của năm số nguyên liên tiếp nên chia hết cho $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Do đó $P - S$ chia hết cho 30. Hay P chia hết cho 30 khi và chỉ khi S chia hết cho 30.

$\square$

$$\text{Câu 5. Cho ba số } x, y, z \text{ khác 0 thỏa mãn } \begin{cases} x + y + z = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{xyz} = 4 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 0. \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức $P = (y^{2009} + z^{2009})(z^{2011} + x^{2011})(x^{2013} + y^{2013})$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{xyz} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2(x + y + z)}{xyz} \\ &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2. \end{aligned}$$

Mà $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 0$, suy ra $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Lại có $x + y + z = \frac{1}{2}$, suy ra $\frac{1}{x + y + z} = 2$.

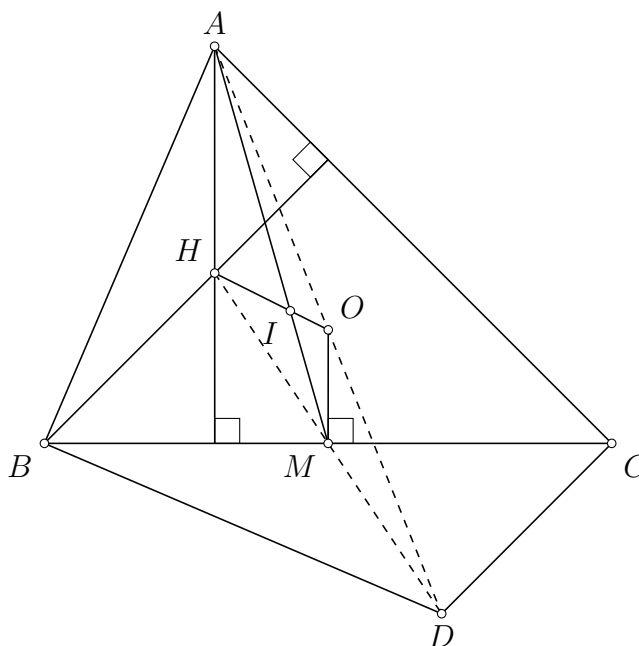
Do đó

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z} \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = -z \\ z = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2009} = -y^{2009} \\ y^{2011} = -z^{2011} \\ z^{2013} = -x^{2013} \end{cases}.$$

Vậy $P = 0$. □

Câu 6. Cho $\triangle ABC$ nhọn có trực tâm H , trọng tâm I . Giao điểm của ba đường trung trực là O , trung điểm của BC là M . Tính giá trị biểu thức $\sqrt{\frac{IO^2 + OM^2}{IH^2 + HA^2}}$.

Lời giải.



Gọi D là điểm đối xứng của A qua O . Do O là giao của ba đường trung trực của $\triangle ABC$ nên $OA = OC = OD$, suy ra $\triangle ACD$ vuông tại C và $BH \parallel CD$. Tương tự cũng có $HC \parallel BD$, suy ra $BHCD$ là hình bình hành và M là trung điểm BC .

Từ đó MO là đường trung bình của $\triangle DAH$ hay $\frac{MO}{AH} = \frac{1}{2}$.

Lại có I là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $\frac{MI}{AI} = \frac{1}{2}$. Do đó $\frac{MO}{AH} = \frac{MI}{AI}$ và $\triangle MOI \sim \triangle AHI$ (c.g.c).

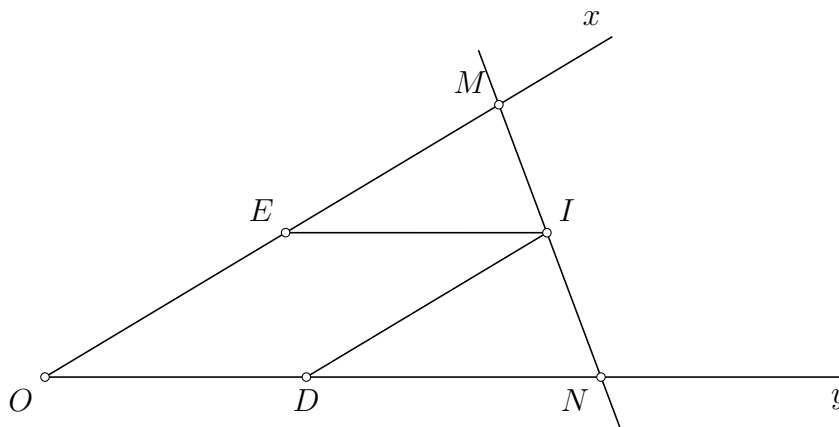
Suy ra $\frac{IO}{IH} = \frac{1}{2}$. Khi đó

$$\frac{IO^2}{IH^2} = \frac{OM^2}{HA^2} = \frac{IO^2 + OM^2}{IH^2 + HA^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{\frac{IO^2 + OM^2}{IH^2 + HA^2}} = \frac{1}{2}.$$

□

Câu 7. Cho góc $\widehat{xOy}$ và một đường thẳng d thay đổi luôn cắt các tia Ox, Oy tại M và N . Biết giá trị biểu thức $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$ không thay đổi khi đường thẳng d thay đổi. Chứng minh rằng đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



Giả sử $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} = \frac{1}{a}$ (a là một số dương không đổi). Lấy điểm D trên Oy sao cho $OD = a$. Khi đó $OD < ON$. Vẽ $DI \parallel Ox$ ($I \in MN$). Lấy E trên Ox sao cho $OE = ID$.

Khi đó $OEID$ là hình bình hành. Ta có

$$\frac{OE}{OM} + \frac{OD}{ON} = \frac{NI}{NM} + \frac{EI}{ON} = \frac{NI}{NM} + \frac{MI}{MN} = 1 \Rightarrow \frac{1}{ON} + \frac{OE}{OD \cdot OM} = \frac{1}{OD} = \frac{1}{a}.$$

Khi đó

$$\frac{1}{OM} = \frac{OE}{OD \cdot OM} \Rightarrow \frac{OE}{OD} = 1 \Rightarrow OE = OD = a.$$

Mà $D \in Oy$, $E \in Ox$ nên OD, OE cố định. Mặt khác O cố định và $OEID$ là hình bình hành nên I cố định. Vậy d luôn đi qua điểm I cố định. $\square$

Câu 8. Cho các số x, y, z không âm, không đồng thời bằng 0 thỏa mãn

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+3} \leq 1.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z + \frac{1}{x+y+z}$.

Lời giải.

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz (Bunhiacopxki) ta có

$$(x+1+y+2+z+3) \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+3} \right) \geq (1+1+1)^2 \Leftrightarrow x+y+z+6 \geq 9 \Leftrightarrow x+y+z \geq 3.$$

Do đó

$$P = \frac{8(x+y+z)}{9} + \frac{x+y+z}{9} + \frac{1}{x+y+z} \geq \frac{8}{3} + 2\sqrt{\frac{x+y+z}{9} \cdot \frac{1}{x+y+z}} = \frac{10}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $(x; y; z) = (2; 1; 0)$. Vậy $\min P = \frac{10}{3}$ khi $(x; y; z) = (2; 1; 0)$. $\square$

Câu 9. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 671$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x^2 - yz + 2013} + \frac{y}{y^2 - zx + 2013} + \frac{z}{z^2 - xy + 2013} \geq \frac{1}{x+y+z}.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} VT &= \frac{x}{x^2 - yz + 2013} + \frac{y}{y^2 - zx + 2013} + \frac{z}{z^2 - xy + 2013} \\ &= \frac{x^2}{x(x^2 - yz + 2013)} + \frac{y^2}{y(y^2 - zx + 2013)} + \frac{z^2}{z(z^2 - xy + 2013)} \\ &\geq \frac{(x + y + z)^2}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2013(x + y + z)}. \end{aligned}$$

Lại có $xy + yz + zx = 671$ nên

$$\begin{aligned} &x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2013(x + y + z) \\ &= (x + y + z) [(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx)] + 2013(x + y + z) \\ &= (x + y + z) [(x + y + z)^2 - 3 \cdot 671 + 2013] = (x + y + z)^3 \end{aligned}$$

Từ đó

$$VT \geq \frac{(x + y + z)^2}{(x + y + z)^3} = \frac{1}{x + y + z}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{\sqrt{2013}}{3}$. □

————— HẾT —————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 24

ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2013-2014, NINH
THUẬN

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1. Tìm x, y thỏa mãn phương trình: $4y\sqrt{x-2} + 2x\sqrt{y-1} = y(3x-2)$

Lời giải.

Điều kiện của phương trình : $x \geq 2, y \geq 1$.

Ta có:

$$\begin{aligned} 4y\sqrt{x-2} + 2x\sqrt{y-1} &= y(3x-2) \Leftrightarrow 4y\sqrt{x-2} + 2x\sqrt{y-1} - 3xy + 2y = 0 \\ \Leftrightarrow -2xy + 4y\sqrt{x-2} + 2y - xy + 2x\sqrt{y-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow -2y(x - 2\sqrt{x-2} - 1) - x(y - 2\sqrt{y-1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -2y(x - 2 - 2\sqrt{x-2} + 1) - x(y - 1 - 2\sqrt{y-1} + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow -2y(\sqrt{x-2} - 1)^2 - x(\sqrt{y-1} - 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2y(\sqrt{x-2} - 1)^2 + x(\sqrt{y-1} - 1)^2 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} - 1 = 0 \\ \sqrt{y-1} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $(x; y) = (3; 2)$

□

Câu 2. Cho các số thực a, b, c không âm. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$$

Lời giải.

Các số a, b, c không âm, nên ta có:

$$\begin{aligned} a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow ab^2 - 2abc + ac^2 + bc^2 - 2abc + ba^2 + ca^2 - 2abc + cb^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 &\geq 6abc \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 &= [(a+b)+c]^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2) + 6abc \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $(a+b+c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 3.6abc + 6abc \Leftrightarrow (a+b+c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$.

□

Câu 3. Cho tam giác ABC có trung tuyến $AM = 1$ và $\widehat{ABC} = \widehat{CAM}$. Tính độ dài cạnh AB .

Lời giải.

Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{MAC}$ (Theo giả thiết) và $\widehat{ACM}$ chung,

suy ra: $\triangle ABC \sim \triangle MAC$

$$\Rightarrow \frac{AB}{MA} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{MC} (*)$$

Theo giả thiết $AM = 1$, nên từ $(*)$ suy ra: $AB = \frac{AC}{MC}$

(1)

Mặt khác, theo giả thiết AM là trung tuyến nên M là trung điểm của $BC \Rightarrow BC = 2MC$.

$$\text{Do đó, từ } (*) \text{ suy ra: } \frac{AC}{MC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{AC}{MC} = \frac{2MC}{AC}$$

$$\Leftrightarrow AC^2 = 2MC^2 \Leftrightarrow \frac{AC^2}{MC^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{AC}{MC} = \sqrt{2} \quad (2)$$

Do đó, từ (1) và (2) suy ra: $AB = \sqrt{2}$.

□

Câu 4. Chứng minh rằng $ab(a^2 - b^2)$ Chia hết cho 3 với mọi số nguyên a và b .

Lời giải.

Xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: a hoặc b chia hết cho 3. Khi đó tích $ab:3$ nên $ab(a^2 - b^2):3$.
- Trường hợp 2: Cả a và b không chia hết cho 3. Khi đó: $a = 3p + r_1$ và $b = 3q + r_2$ với p, q, r_1, r_2 nguyên và $1 \leq r_1, r_2 \leq 2$.

$$\oplus \text{ Nếu: } r_1 = r_2 \text{ thì } (a - b):3 \text{ suy ra } ab(a^2 - b^2) = ab(a - b)(a + b):3$$

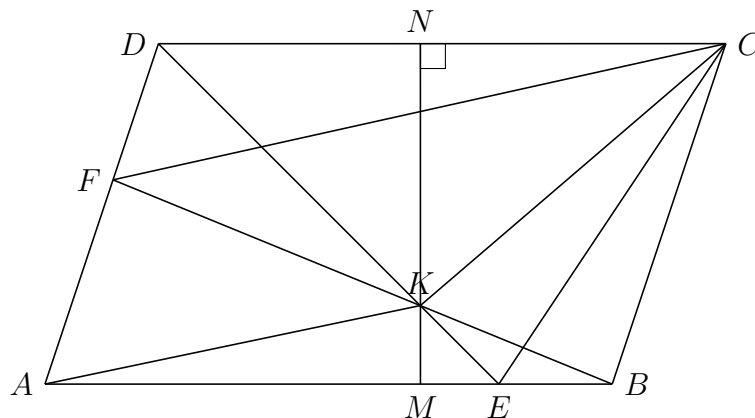
$$\oplus \text{ Nếu: } r_1 \neq r_2 \text{ thì } (a + b):3 \text{ suy ra } ab(a^2 - b^2) = ab(a - b)(a + b):3$$

Vậy: $ab(a^2 - b^2):3$ với mọi số nguyên a, b .

□

Câu 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các cạnh AB và AD lần lượt lấy các điểm E và F (E, F không trùng với các đỉnh của hình bình hành). Gọi K là giao điểm của ED và FB . Chứng minh rằng hai tứ giác $ABKD$ và $CEKF$ có diện tích bằng nhau.

Lời giải.



Ta có: $S_{ABKD} = S_{\triangle AKB} + S_{\triangle AKD}$ và $S_{CEKF} = S_{\triangle CKE} + S_{\triangle CKF}$

Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với AB và CD (vì $AB \parallel CD$), cắt AB tại M và cắt CD tại N .

$$\text{Ta có: } S_{\triangle AKB} + S_{\triangle CKD} = \frac{1}{2}KM \cdot AB + \frac{1}{2}KN \cdot CD = \frac{1}{2}AB \cdot MN = \frac{1}{2}S_{ABCD} \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có: } S_{\triangle CKE} + S_{\triangle CKD} = S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}CD \cdot MN = \frac{1}{2}S_{ABCD} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } S_{\triangle AKB} = S_{\triangle CKE} \quad (3)$$

$$\text{Tương tự, ta cũng có: } S_{\triangle AKD} + S_{\triangle CKB} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \text{ và } S_{\triangle CKF} + S_{\triangle CKB} = S_{\triangle BFC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

$$\text{Suy ra: } S_{\triangle AKD} = S_{\triangle CKF} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra: } S_{\triangle AKB} + S_{\triangle AKD} = S_{\triangle CKE} + S_{\triangle CKF}$$

$$\text{Vậy: } S_{ABKD} = S_{CEKF}$$

□

————— HẾT —————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 25

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
TOÁN 9 NĂM HỌC 2013-2014,
VĨNH PHÚC

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1.

- a) Cho biểu thức $M = \frac{2\sqrt{a}-16}{a-6\sqrt{a}+8} - \frac{\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}-2} - \frac{2\sqrt{a}+1}{4-\sqrt{a}}$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để giá trị của M là một số nguyên.
- b) Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $P(x) \geq 0$ với mọi số thực x và $b > a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{a+b+c}{b-a}$.

Lời giải.

- a) Điều kiện xác định: $a \geq 0, a \neq 4, a \neq 16$.
 Ta có $M = \frac{2\sqrt{a}-16}{a-6\sqrt{a}+8} - \frac{\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}-2} - \frac{2\sqrt{a}+1}{4-\sqrt{a}} = \frac{a-\sqrt{a}-2}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-4)} = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-4}$
 $M = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-4} = 1 + \frac{5}{\sqrt{a}-4}$, M nguyên suy ra $\sqrt{a}-4$ là ước của 5, cho nên $\sqrt{a}-4 \in \{\pm 1; \pm 5\} \Rightarrow a = 9; 25; 81$.
- b) $P(-2) = 4a - 2b + c \geq 0 \Rightarrow a + b + c \geq 3(b-a)$ suy ra $Q \geq 3$. Ta thấy đa thức $P(x) = x^2 + 4x + 4$ thỏa mãn giả thiết và $Q = 3$. Vậy $Q_{\min} = 3$.

□

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau vô nghiệm:

$$\frac{x+1}{x-m+1} = \frac{x}{x+m+2}$$

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \neq m-1, x \neq -m-2$.

Phương trình tương đương với $(2m+2)x = -m-2$ (1).

Nếu $m = -1$, (1) $\Leftrightarrow 0x = -1$ (vô nghiệm)

Nếu $m \neq -1$, $x = \frac{-m-2}{2m+2}$, phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{-m-2}{2m+2} = m-1 \quad (2) \text{ hoặc } \frac{-m-2}{2m+2} = -m-2 \quad (3).$$

$$(2) \Leftrightarrow m = 0; m = -\frac{1}{2}$$

$$(3) \Leftrightarrow m = -2; m = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } m = 0, m = -1, m = -2, m = -\frac{1}{2}. \quad \square$$

Câu 3. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng số $p^{1954^{57}} - 1$ chia hết cho 60.

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh $p^{4m} - 1$ chia hết cho 60 với mọi m nguyên dương.

$p^{4m} - 1 = M(p^2 - 1)(p^2 + 1)$, p nguyên tố lẻ suy ra $(p^2 - 1)(p^2 + 1)$ chia hết cho 4.

p là số nguyên tố lớn hơn 5 theo định lý Fermat nhỏ ta có $p^4 - 1$ chia hết cho 5.

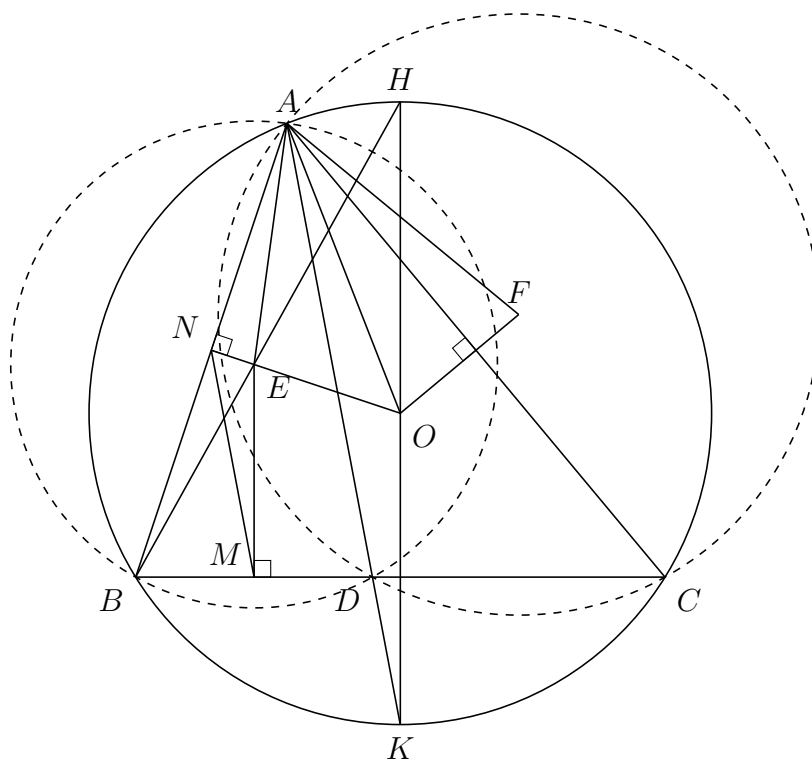
p là số nguyên tố lớn hơn 5 suy ra $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ cho nên $p^2 - 1$ chia hết cho 3.

Vậy $p^{4m} - 1$ chia hết cho 60. Dễ thấy 1954^{57} chia hết cho 4 (DPCM). $\square$

Câu 4. Cho đường tròn (O) có tâm O và bán kính R . Hai điểm phân biệt B, C cố định nằm trên (O) sao cho $BC = a < R$. Gọi A là điểm bất kì thuộc cung lớn BC của (O) , A không trùng với B, C . Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ A của tam giác ABC . Hai điểm E, F lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADB và ADC .

- Chứng minh rằng hai tam giác AEO và ADC đồng dạng.
- Tính diện tích tứ giác $AEOF$ theo a và R .
- Chứng minh rằng khi điểm A thay đổi thì E di chuyển trên một đường thẳng cố định.

Lời giải.



a) Gọi N là trung điểm của AB , trong đường tròn (O) ta có $\widehat{AON} = \widehat{ACB}$ (1), trong đường tròn (ADB) ta có $\widehat{AEN} = \widehat{ADB} \Rightarrow 180^\circ - \widehat{AEN} = 180^\circ - \widehat{ADB} \Rightarrow \widehat{AEO} = \widehat{ADC}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra hai tam giác AEO và ADC đồng dạng.

b) Hai tam giác AEO và ADC đồng dạng suy ra $\frac{OE}{CD} = \frac{AO}{AC} \Rightarrow OE = \frac{AO \cdot CD}{AC}$ (3). Chứng minh tương tự hai tam giác AFO và ADB đồng dạng suy ra $OF = \frac{AO \cdot BD}{AB}$ (4).

Vì AD là phân giác suy ra $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$ (5).

$$4S_{AEOF} = OE \cdot AB + OF \cdot AC \quad (6)$$

$$\text{Từ (3), (4), (5), (6) ta có } 4S_{AEOF} = AO(BD + CD) = R \cdot a \Rightarrow S_{AEOF} = \frac{R \cdot a}{4}.$$

c) Gọi H là giao điểm của OK và (O) , M là trung điểm của BD , dễ thấy $\widehat{BNE} = \widehat{BME} = 90^\circ$ suy ra tứ giác $BMEN$ nội tiếp đường tròn đường kính BE mặt khác $MN \parallel AK \Rightarrow \widehat{BEM} = \widehat{BNM} = \widehat{BAK} = \widehat{BHK}$.

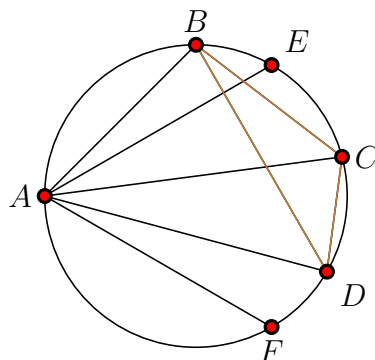
Giả sử H' là giao điểm của BE và HK , $EM \parallel HK \Rightarrow \widehat{BEM} = \widehat{BH'K} = \widehat{BHK} \Rightarrow H \equiv H'$. Vậy E thuộc đường thẳng BH cố định khi A thay đổi.

□

Câu 5. Trên một đường tròn cho 21 điểm phân biệt. Mỗi một điểm được tô bởi một trong 4 màu: xanh, đỏ, tím, vàng. Giữa mỗi cặp điểm nối với nhau bằng một đoạn thẳng được tô bởi một trong 2 màu: nâu hoặc đen. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tam

giác có ba đỉnh được tô cùng một màu (xanh, đỏ, tím hoặc vàng) và ba cạnh cũng được tô cùng một màu (nâu hoặc đen).

Lời giải.



Vì các điểm phân biệt nằm trên một đường tròn nên ba điểm bất kỳ luôn tạo thành một tam giác. Có 21 điểm được tô bằng 4 màu, do đó có ít nhất 6 điểm có cùng màu. Giả sử có 6 điểm cùng màu đỏ là A, B, C, D, E, F . Nối 5 đoạn AB, AC, AD, AE, AF và tô bằng 2 màu nâu, đen khi đó có ít nhất 3 đoạn cùng màu, giả sử AB, AC, AD được tô cùng màu đen. Xét tam giác BCD , xảy ra hai khả năng

- i) Nếu ba cạnh BC, BD, DC được tô cùng màu nâu thì tam giác BCD có ba đỉnh cùng màu đỏ, ba cạnh cùng màu nâu (thỏa mãn)
- ii) Nếu ba cạnh BC, BD, DC có ít nhất một cạnh màu đen, giả sử BC đen, khi đó tam giác ABC có ba đỉnh cùng màu đỏ, ba cạnh cùng màu đen (thỏa mãn)

Vậy luôn có một tam giác có ba đỉnh cùng màu và ba cạnh cùng màu. □

————— HẾT —————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 26

ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2017-2018, AN
GIANG.

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1. Cho $x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$. Tìm giá trị của biểu thức $P = (1 + 3x^3 - x^5)^{2016}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{3+2\sqrt{3}+1} + \sqrt{3-2\sqrt{3}+1}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}}{2} \\
 &= \sqrt{3} \\
 \Rightarrow 1 - 3x^3 + x^5 &= 1 - 3 \cdot (\sqrt{3})^3 + (\sqrt{3})^5 = 1.
 \end{aligned}$$

Vậy $A = (1 - 3x^3 + x^5)^{2016} = 1$. □

Câu 2. Cho Parabol (P) : $y = \frac{1}{4}x^2$ và điểm $A(0; 1)$.

- Vẽ Parabol (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .
- Chứng minh rằng nếu điểm M nằm trên (P) thì độ dài đoạn MA bằng khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = -1$.

(Biết khoảng cách giữa hai điểm $C(x_c; y_c), D(x_D; y_D)$ bất kỳ trên mặt phẳng tọa độ được tính theo công thức $CD = \sqrt{(x_D - x_c)^2 + (y_D - y_c)^2}$).

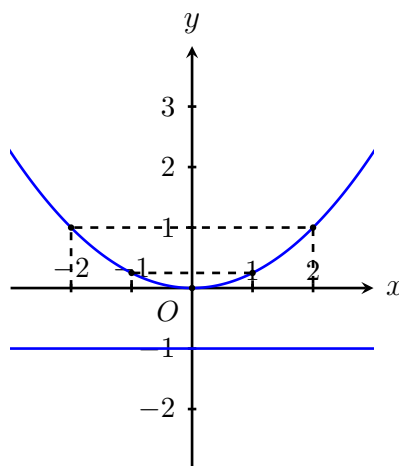
Lời giải.

- Vẽ Parabol (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

Giá trị đặc biệt

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{1}{4}x^2$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1

Đồ thị



- b) Chứng minh rằng nếu điểm M nằm trên (P) thì độ dài đoạn MA bằng khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = -1$.

Điểm M thuộc $(P) \Rightarrow M\left(x; \frac{1}{4}x^2\right); A(0; 1)$.

Từ M kẻ MN vuông góc với (d) , và AH vuông góc MN .

Khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = -1$ là

$$MN = y_M + 1 = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

Khoảng cách giữa hai điểm M, A là

$$\begin{aligned}
 AM &= \sqrt{(x_M)^2 + (y_M - y_A)^2} \\
 &= \sqrt{(0 - x)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)^2} \\
 &= \sqrt{x^2 + 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}x^4} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right)^2} \\
 &= \frac{1}{4}x^2 + 1 \\
 &= y_M + 1 = MN
 \end{aligned}$$

Vậy khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = -1$ bằng độ dài đoạn thẳng MA .

□

Câu 3. Cho phương trình $x^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ trong đó a, b, c là các số nguyên. Biết phương trình có nghiệm $x_0 = 2 + \sqrt{5}$ tìm b, c và các nghiệm còn lại của phương trình.

Lời giải.

Phương trình $x^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm $x_0 = 2 + \sqrt{5}$ nên

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{5})^3 + b(2 + \sqrt{5})^2 + c(2 + \sqrt{5}) + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2^3 + 12\sqrt{5} + 30 + 5\sqrt{5}) + b(9 + 4\sqrt{5}) + c(2 + \sqrt{5}) + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (4b + c + 17)\sqrt{5} + (9b + 2c + 39) &= 0\end{aligned}$$

Vì $\sqrt{5}$ là số vô tỉ, b, c là các số nguyên nên ta có

$$\begin{cases} 4b + c + 17 = 0 \\ 9b + 2c + 39 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8b + 2c + 34 = 0 \\ 9b + 2c + 39 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ c = 3 \end{cases}$$

Với $b = -5; c = 3$ phương trình trở thành

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 4x - 1) = 0 \quad \text{Phngtrnhcbanghim} \quad x_0 = 2 + \sqrt{5}; x_1 = 2 - \sqrt{5}; x_2 = 1. \quad \square$$

Câu 4. Tìm x, y biết

$$\sqrt{2(\sqrt{x} + y - 2)} = \sqrt{\sqrt{x} \cdot y}.$$

Lời giải.

ĐK $x, y \geq 0; \sqrt{x} + y - 2 \geq 0$.

Bình phương hai vế của phương trình ta có

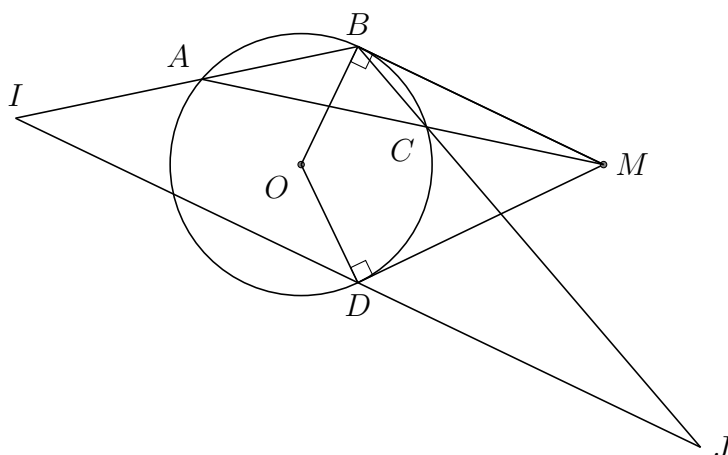
$$\begin{aligned}2\sqrt{x} + 2y - 4 &= \sqrt{x} \cdot y \\ \Leftrightarrow \sqrt{x}(2 - y) + 2(y - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (y - 2)(2 - \sqrt{x}) &= 0\end{aligned}$$

Khi đó $x = 4$ hoặc $y = 2$. So với điều kiện, ta có $x = 4; y \geq 0$ hoặc $x \geq 0; y = 2$. $\square$

Câu 5. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MB, MD với đường tròn (B, D là tiếp điểm) và một cát tuyến qua M cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, C .

- Chứng minh hai tam giác MAB và MBC đồng dạng.
- Chứng minh $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.
- Gọi (d) là đường thẳng qua D và song song với MB , (d) cắt BA, BC lần lượt tại I và J . Chứng minh $DI = DJ$.

Lời giải.



- a) Chứng minh hai tam giác MAB và MBC đồng dạng.

Hai tam giác MAB và MBC có

$\widehat{M}$ chung

$\widehat{MBA} = \widehat{MCB}$ (cùng chắn cung $\widehat{AB}$)

Vậy $\triangle MAB \sim \triangle MBC$.

- b) Chứng minh $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.

Ta có

$$\triangle MAB \sim \triangle MBC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{MB}{MC} \quad (1)$$

Hai tam giác MAD và MDC có

$\widehat{M}$ chung

$\widehat{MDA} = \widehat{MCD}$ (cùng chắn cung $\widehat{AD}$)

Vậy $\triangle MAD \sim \triangle MDC$.

$$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{MD}{MC} \quad (2)$$

Mà $MB = MD$ nên từ (1) và (2) ta có

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \Leftrightarrow AB \cdot DC = AD \cdot BC.$$

- c) Gọi (d) là đường thẳng qua D và song song với MB , (d) cắt BA, BC lần lượt tại I và J . Chứng minh $DI = DJ$.

Hai tam giác IBD và DBA đồng dạng do

$\widehat{B}$ chung

$$\widehat{BID} = \widehat{IBM} \text{ (so le trong)}$$

$$\widehat{IBM} = \widehat{BDA} \text{ (chắn cung } \widehat{AB})$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{ID}{DA} \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{ID}{BD} \quad (3)$$

Tương tự hai tam giác JBD và DBC đồng dạng.

$$\Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{ID}{DC} \Leftrightarrow \frac{DC}{BC} = \frac{JD}{BD} \quad (4)$$

Theo câu a)

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC} \quad (5)$$

$$(3), (4), (5) \Rightarrow \frac{ID}{BD} = \frac{JD}{BD} \Rightarrow DI = DJ.$$

□

————— HẾT —————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 27

ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2016-2017, SỞ GD
BẾN TRE

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1.

- a) Chứng minh rằng: $A = n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4$ chia hết cho 16 với mọi n là số nguyên.
- b) Cho biểu thức $B = \sqrt{\frac{(x^2 - 3)^2 + 12x^2}{x^2}} + \sqrt{(x + 2)^2 - 8x}$.
Rút gọn biểu thức B và tìm các giá trị nguyên của x để B có giá trị nguyên.
- c) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$.

Lời giải.

- a) Ta có $A = n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4 = n^4(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) = [n(n + 1)]^4$.
Vì $n(n + 1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp nên $n(n + 1) : 2 \Rightarrow [n(n + 1)]^4 : 2^4 = 16$.
Do đó: $A : 16$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

$$b) B = \sqrt{\frac{(x^2 - 3)^2 + 12x^2}{x^2}} + \sqrt{(x + 2)^2 - 8x} = \sqrt{\frac{(x^2 + 3)^2}{x^2}} + \sqrt{(x - 2)^2} = \frac{x^2 + 3}{|x|} + |x - 2|.$$

$$\bullet \text{ Nếu } x < 0 \Rightarrow B = \frac{-x^2 - 3}{x} - x + 2 = \frac{-2x^2 + 2x - 3}{x} = -2x + 2 - \frac{3}{x}.$$

$$B \text{ có giá trị nguyên khi } \frac{3}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in U(3) \text{ và } x < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

$$\bullet \text{ Nếu } 0 < x \leq 2 \Rightarrow B = \frac{x^2 + 3}{x} - x + 2 = \frac{2x + 3}{x} = 2 + \frac{3}{x}.$$

$$B \text{ có giá trị nguyên khi } \frac{3}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in U(3) \text{ và } 0 < x \leq 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\bullet \text{ Nếu } x > 2 \Rightarrow B = \frac{x^2 + 3}{x} + x - 2 = \frac{2x^2 - 2x + 3}{x} = 2x - 2 + \frac{3}{x}.$$

$$B \text{ có giá trị nguyên khi } \frac{3}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in U(3) \text{ và } x > 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Tập các giá trị của x để B nguyên là $x \in \{\pm 1; \pm 3\}$.

$$c) 2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy \Leftrightarrow (x-1)(x-2y^2+y) = 1.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ x-2y^2+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2y^2-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=-1 \\ x-2y^2+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y^2-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên là $(2; 1)$ và $(0; 1)$.

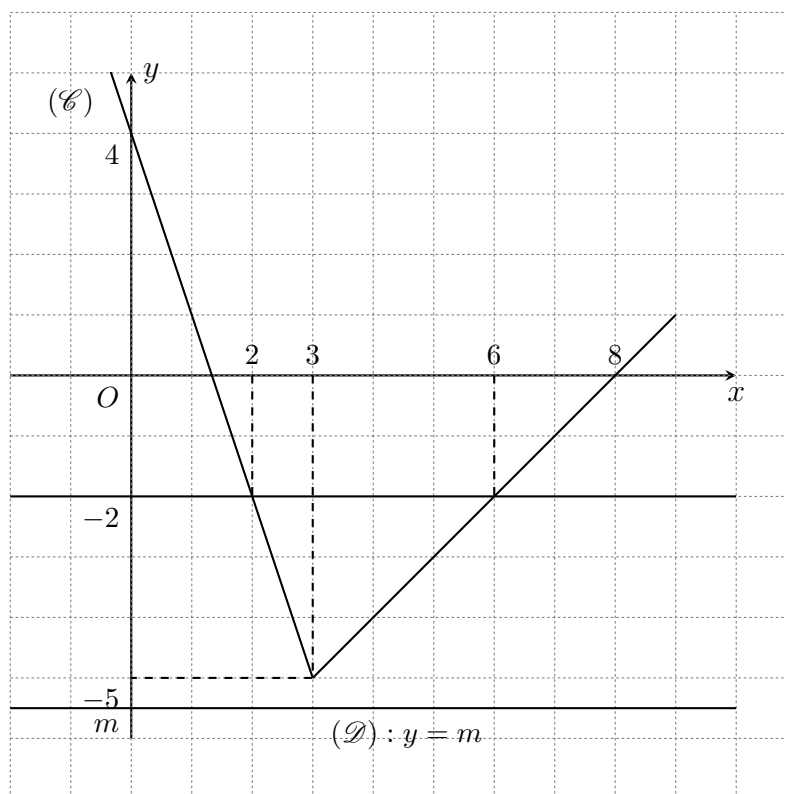
□

Câu 2. Cho hàm số $y = 2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2$ có đồ thị $(\mathcal{C})$.

- Vẽ đồ thị $(\mathcal{C})$ của hàm số trên
- Với giá trị nào của m thì phương trình $2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2 = m$ vô nghiệm.
- Dựa vào đồ thị $(\mathcal{C})$, tìm tập nghiệm của bất phương trình $2\sqrt{x^2 - 6x + 9} \geq x$.

Lời giải.

$$a) y = 2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2 = 2|x-3| - x - 2 = \begin{cases} x-8 & \text{nếu } x \geq 3 \\ -3x+4 & \text{nếu } x < 3 \end{cases}.$$



b) $2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2 = m (*)$.

Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị sau: $(\mathcal{C}) : y = 2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2$ và $(\mathcal{D}) : y = m$ là đường thẳng song song với trục Ox và cắt Oy tại điểm có tung độ m .

Căn cứ đồ thị ta có phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow (\mathcal{C})$ và $(\mathcal{D})$ không giao nhau $\Leftrightarrow m < -5$.

□

Câu 3. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 2017 \\ z^2 + \frac{y^2}{3} = 1009 \\ x^2 + xz + z^2 = 1008 \end{cases} \quad (x \neq 0, z \neq 0, x \neq -z).$$

Chứng minh rằng: $\frac{2z}{x} = \frac{y+z}{x+z}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 2017 & (1) \\ z^2 + \frac{y^2}{3} = 1009 & (2) \quad (x \neq 0, z \neq 0, x \neq -z). \\ x^2 + xz + z^2 = 1008 & (3) \end{cases}$$

Trừ (1) và (2) theo vế, ta có: $x^2 - xy - z^2 = 1008$ (4).

Trừ (3) và (4) theo vế, ta có: $xz - xy + 2z^2 = 0$

$$\Leftrightarrow xz + 2z^2 = xy \Leftrightarrow 2xz + 2z^2 = xy + xz.$$

$$\Leftrightarrow 2z(x+z) = x(y+z).$$

$$\Leftrightarrow \frac{2z}{x} = \frac{y+z}{x+z}.$$

□

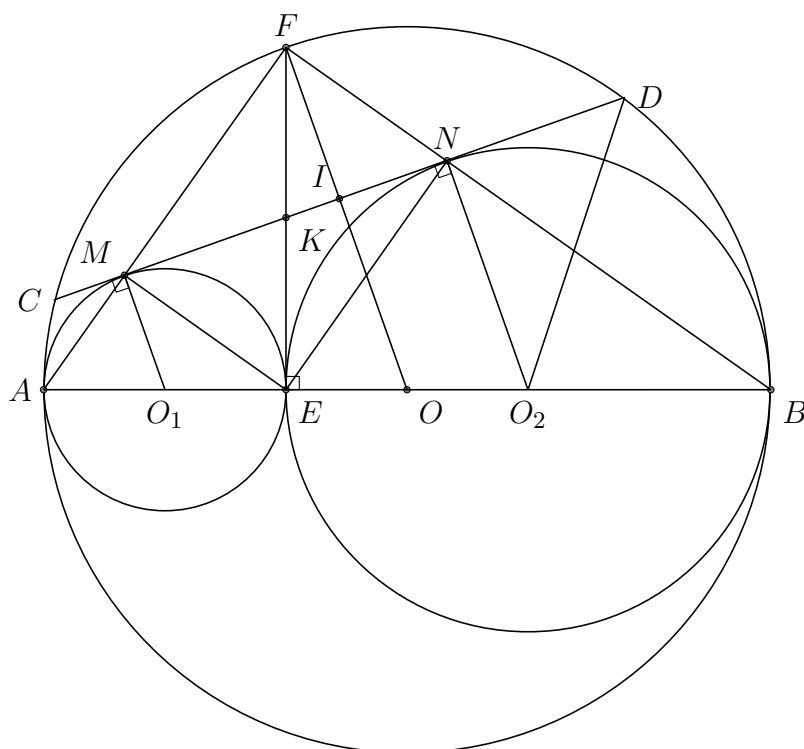
Câu 4. Cho đoạn thẳng AB và điểm E nằm giữa điểm A và điểm B sao cho $AE < BE$.

Vẽ đường tròn (O_1) đường kính AE và đường tròn (O_2) đường kính BE . Vẽ tiếp tuyến chung ngoài MN của hai đường tròn (O_1) và (O_2) với M là tiếp điểm thuộc (O_1) và N là tiếp điểm thuộc (O_2) .

a) Gọi F là giao điểm của các đường thẳng AM và BN . Chứng minh rằng đường thẳng EF vuông góc với đường thẳng AB .

b) Với $AB = 18$ cm và $AE = 6$ cm, vẽ đường tròn (O) đường kính AB . Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại C và D sao cho điểm C thuộc cung nhỏ AD . Tính độ dài đoạn thẳng CD .

Lời giải.



- a) MN là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) nên $\begin{cases} MN \perp O_1M \\ MN \perp O_2N \end{cases} \Rightarrow O_1M \parallel O_2N.$

$$\Rightarrow \widehat{MO_1E} + \widehat{NO_2E} = 180^\circ.$$

$$\Delta O_1AM \text{ cân tại } O_1 \Rightarrow \widehat{MO_1E} = 2\widehat{O_1AM}.$$

$$\Delta O_2BN \text{ cân tại } O_2 \Rightarrow \widehat{MO_2E} = 2\widehat{O_2BN}.$$

$$\Rightarrow \widehat{O_1AM} + \widehat{O_2BN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MFN} = 90^\circ.$$

Mặt khác $\widehat{AME} = \widehat{BNE} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow MENF$ là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow \widehat{MEF} = \widehat{NME}.$$

$$\text{Mà } \widehat{O_1EM} = \widehat{O_1ME} \text{ và } \widehat{NME} + \widehat{O_1ME} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MEF} + \widehat{O_1EM} = 90^\circ$$

hay $EF \perp AB$ tại E .

- b) Ta có: $AB = 18 \text{ cm}$, $AE = 6 \text{ cm} \Rightarrow EB = 12 \text{ cm}$, $OF = 9 \text{ cm}$.

ΔAFB vuông tại F có đường cao EF nên $EF^2 = AE \cdot EB = 6 \cdot 12 = 72 \Rightarrow EF = 6\sqrt{2} \text{ cm}$.

$$\Rightarrow MN = EF = 6\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Gọi I, K lần lượt là giao điểm của EF, OF với MN .

Tứ giác $MENF$ là hình chữ nhật nên $\widehat{NMF} = \widehat{NEF}$. Mà $\widehat{NEF} = \widehat{ABF}$ (cùng phụ góc $\widehat{BEM}$).

$$\Rightarrow \widehat{NMF} = \widehat{ABF} \quad (1).$$

$$\Rightarrow \triangle FNM \sim \triangle FAB.$$

Lại có $\triangle OAF$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OAF} = \widehat{OFA}$ (2) và $\widehat{OAF} + \widehat{ABF} = 90^\circ$ (3).

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow \widehat{NMF} + \widehat{OFA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MIF} = 90^\circ.$$

$$\triangle FNM \sim \triangle FAB \text{ và có } FI, FE \text{ là hai đường cao tương ứng nên: } \frac{FI}{EF} = \frac{MN}{AB} \Rightarrow$$

$$FI = 4 \text{ cm} \Rightarrow OI = 5 \text{ cm}.$$

$$\triangle OID \text{ vuông tại } I \Rightarrow ID = \sqrt{OD^2 - OI^2} = 2\sqrt{14} \text{ cm}.$$

$$\text{Vì } OF \perp CD \text{ tại } I \Rightarrow CD = 2ID = 4\sqrt{14} \text{ cm}.$$

□

Câu 5. Cho tam giác ABC cân tại A , có góc A nhỏ hơn 90° . Từ B kẻ BM vuông góc với AC tại điểm M (điểm $M \in AC$). Chứng minh rằng: $\frac{AM}{MC} + 1 = 2 \left(\frac{AB}{BC} \right)^2$.

Lời giải.

Tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow AB = AC$.

$$\text{Ta có: } \frac{AM}{MC} + 1 = 2 \left(\frac{AB}{BC} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{AM + MC}{MC} = 2 \frac{AC^2}{BC^2} \Leftrightarrow \frac{AC}{MC} =$$

$$2 \frac{AC^2}{BC^2} \Leftrightarrow BC^2 = 2AC \cdot MC.$$

Ta cần chứng minh: $BC^2 = 2AC \cdot MC$.

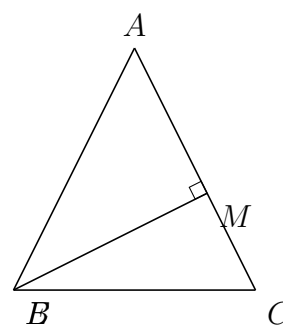
Thật vậy:

$$BC^2 = BM^2 + MC^2 = AB^2 - AM^2 + (AC - AM)^2$$

$$= AC^2 - AM^2 + AC^2 - 2AC \cdot AM + AM^2$$

$$= 2AC^2 - 2AC \cdot AM = 2AC(AC - AM) = 2AC \cdot MC.$$

□



HẾT

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 28

ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2016-2017, HẢI PHÒNG

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1. Cho $x = \frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$. Tính giá trị của biểu thức: $P = (12x^2 + 4x - 55)^{2017}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1) = \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) = 2.$$

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{5} = \sqrt{5}+1-\sqrt{5} = 1.$$

Vậy $x = 2$. Thay giá trị x vào P ta được:

$$P = (12 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 55)^{2017} = 1^{2017} = 1.$$

□

Câu 2. Cho biểu thức $M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a > 0$, $a \neq 1$. Với những giá trị nào của a thì biểu thức $N = \frac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên?

Lời giải.

Với điều kiện $a > 0$, $a \neq 1$ thì:

$$\begin{aligned} M &= \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} - \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\ &= \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} - \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}+1)^2}{\sqrt{a}}. \\ \Rightarrow N &= \frac{6}{M} = \frac{6\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2} > 0. \end{aligned}$$

Khi đó ta thấy với $0 < a \neq 1$ thì

$$a - \sqrt{a} + 1 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} + 1)^2 > 3\sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{a}}{(\sqrt{a} + 1)^2} < 2.$$

Do $0 < N < 2$ nên để N có giá trị nguyên thì $N = 1$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{6\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}+1} = 1 \Leftrightarrow a - 4\sqrt{a} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - 2)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{3} + 2 \\ \sqrt{a} = -\sqrt{3} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 + 4\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn)} \\ a = 7 - 4\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy $a = 7 \pm 4\sqrt{3}$. □

Câu 3. Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ (với m là tham số). Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $|x_1| + |x_2| = 8$?

Lời giải.

Phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ có hai nghiệm thì

$$\Delta' = m^2 - (m^2 - m - 6) = m + 6 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -6.$$

Theo hệ thức Viét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m^2 - m - 6 \end{cases}$$

Ta có

$$|x_1| + |x_2| = 8 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2| = 64 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| = 64. \quad (1)$$

Trường hợp 1: Nếu x_1 và x_2 cùng dấu thì:

$$x_1 x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -6 \\ m^2 - m - 6 = (m+2)(m-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq m \leq -2 \\ m \geq 3 \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 64 \Leftrightarrow 4m^2 = 64 \Leftrightarrow m = \pm 4 \text{ (thỏa mãn } (*))$$

Trường hợp 2: Nếu x_1 và x_2 trái dấu thì:

$$x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 = (m+2)(m-3) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 3. \quad (**)$$

Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 64 \Leftrightarrow 4m^2 - 4(m^2 - m - 6) = 64$$

$$\Leftrightarrow m + 6 = 16 \Leftrightarrow m = 10 \text{ (không thỏa mãn điều kiện } (**))$$

Kết luận: $m = \pm 4$. □

Câu 4. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^3 y^2 - 2x^2 y - x^2 y^2 + 2xy + 3x - 3 = 0 \\ y^2 + x^{2017} = y + 3m \end{cases}$ (với m là tham số).

Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ thỏa mãn điều kiện $(x_1 + y_2)(x_2 + y_1) + 3 = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x^3y^2 - 2x^2y - x^2y^2 + 2xy + 3x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2y^2 - 2xy + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (xy-1)^2 + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \end{aligned}$$

Thay $x = 1$ vào phương trình dưới của hệ ta được $y^2 - y - 3m + 1 = 0$. (1)

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì

$$\Delta = 1 + 4(3m - 1) > 0 \Leftrightarrow 12m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$$

Theo đề bài và chú ý rằng $x_1 = x_2 = 1$:

$$(x_1 + y_2)(x_2 + y_1) + 3 = 0 \Leftrightarrow 4 + y_1 + y_2 + y_1y_2 = 0. \quad (2)$$

Với $m > \frac{1}{4}$, theo hệ thức Viét cho phương trình (1) ta có

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 1 \\ y_1y_2 = 1 - 3m \end{cases}$$

Thay vào (2) ta được

$$5 + 1 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Kết luận $m = 2$. □

Câu 5. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $a + b^2$ chia hết cho $a^2b - 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} (a + b^2) : (a^2b - 1) &\Rightarrow a + b^2 = k(a^2b - 1), \quad k \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow a + k &= b(ka^2 - b) \text{ hay } mb = a + k \quad (1) \text{ với } m = ka^2 - b \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow m + b &= ka^2. \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$mb - m - b + 1 = a + k - ka^2 + 1 \Leftrightarrow (m-1)(b-1) = (a+1)(k+1-ka). \quad (3)$$

Do $m, b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (m-1)(b-1) \geq 0$.

Vì thế từ (3) suy ra: $(a+1)(k+1-ka) \geq 0$.

Lại do $a > 0$ nên suy ra: $k+1-ka \geq 0 \Rightarrow 1 \geq k(a-1)$.

Vì $a-1 > 0, k > 0$ nên $1 \geq k(a-1) \geq 0$ và $k(a-1) \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow \begin{cases} k(a-1) = 0 \\ k(a-1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \\ k = 1 \end{cases}$$

Với $a = 1$. Thay vào (3) ta được:

$$(m-1)(b-1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} m-1=2 \\ b-1=1 \\ m-1=1 \\ b-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \Rightarrow ka^2=5 \Rightarrow a=1 \\ b=3 \Rightarrow ka^2=5 \Rightarrow a=1 \end{array} \right.$$

Vậy, trường hợp này ta được hai cặp $a = 1, b = 2$ và $a = 1, b = 3$.

Với $a = 2$ và $k = 1$. Thay vào (3) ta có:

$$(m-1)(b-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ m=1 \end{array} \right.$$

Khi $b = 1$, ta được $a = 2, b = 1$.

Khi $m = 1$. Từ (1) suy ra $a + k = b \Rightarrow b = 3$. Khi đó $a = 2, b = 3$.

Vậy có 4 cặp số $(a; b)$ thỏa mãn là: $(1; 2), (1; 3), (2; 3), (2; 1)$. □

Câu 6. Cho ba số thực a, b, c dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq 1$$

Lời giải.

Với x là số dương, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3 + 1} &= \sqrt{(x+1)(x^2 - x + 1)} \leq \frac{x+1 + x^2 - x + 1}{2} = \frac{x^2 + 2}{2} \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x^3 + 1}} &\geq \frac{2}{x^2 + 2} \end{aligned} \quad (*)$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 2$.

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta được

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{b+c}{a}\right)^3}} \geq \frac{2}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + 2} = \frac{2a^2}{(b+c)^2 + 2a^2}.$$

Suy ra

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} \geq \frac{2a^2}{2(b^2 + c^2) + 2a^2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (1)$$

Tương tự ta có

$$\sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} \geq \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (3)$$

Cộng theo vế của ba bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

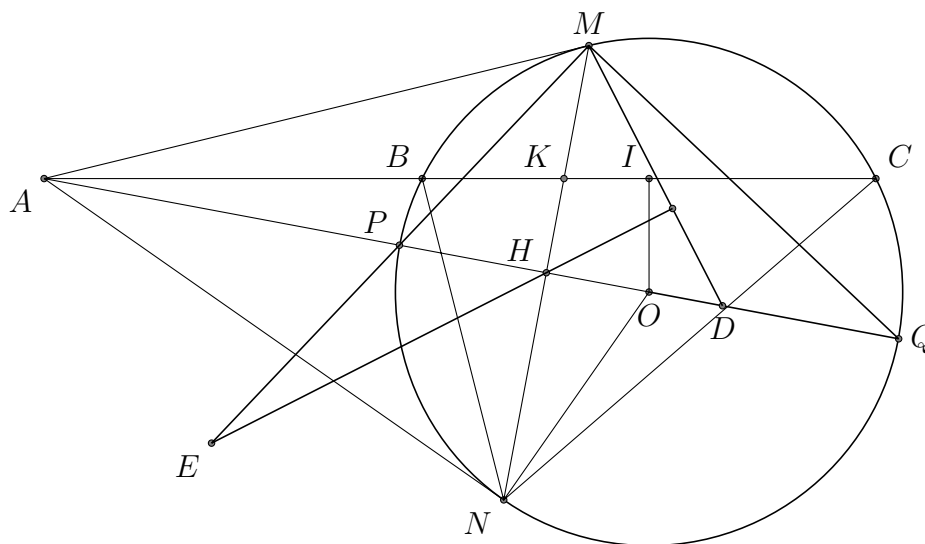
$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq 1.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$. $\square$

Câu 7. Cho ba điểm A, B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (điểm B nằm giữa điểm A và điểm C). Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua điểm B và điểm C (điểm O không thuộc đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O (với M và N là các tiếp điểm). Đường thẳng BC cắt MN tại điểm K . Đường thẳng AO cắt MN tại điểm H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và Q).

- Chứng minh điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.
- Gọi D là trung điểm của HQ , từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E . Chứng minh rằng P là trung điểm của ME .

Lời giải.



- Gọi I là trung điểm của BC , suy ra $IO \perp BC$.

$\triangle ABN$ đồng dạng với $\triangle ANC$ (vì $\widehat{ANB} = \widehat{ACN}$, $\widehat{CAN}$ chung)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AN^2$$

$\triangle ANO$ vuông tại N , đường cao NH nên $AH.AO = AN^2$. Suy ra

$$AB.AC = AH.AO \quad (1)$$

$\triangle AHK$ đồng dạng với $\triangle AIO$ (g.g) nên

$$\frac{AH}{AI} = \frac{AK}{AO} \Rightarrow AI.AK = AH.AO \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$AI.AK = AB.AC \Rightarrow AK = \frac{AB.AC}{AI}$$

Ta có A, B, C cố định nên I cũng cố định, suy ra AK không đổi. Mà A cố định, K là giao điểm của BC và MN nên K thuộc tia AB , suy ra K cố định.

b) Xét hai tam giác MHE và QDM . Có

$$\widehat{NME} = \widehat{MQP}$$

$$\widehat{NHE} = 90^\circ - \widehat{AHE} = \widehat{MDH}. \text{ Suy ra } \widehat{MHE} = 180^\circ - \widehat{NHE} = 180^\circ - \widehat{MDH} = \widehat{MDQ}$$

Vậy $\triangle MHE$ đồng dạng với $\triangle QDM$, suy ra $\frac{ME}{MQ} = \frac{MH}{DQ}$.

Mặt khác, $\triangle PMH$ đồng dạng với $\triangle MQH$ (g.g), suy ra $\frac{MP}{MQ} = \frac{MH}{QH} = \frac{MH}{2DQ}$.

Từ hai kết quả trên suy ra

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ME}{MQ} \Rightarrow ME = 2MP$$

Từ đó suy ra P là trung điểm của ME . □

Câu 8. Cho tập hợp A gồm 21 phần tử là các số nguyên khác nhau thỏa mãn tổng của 11 phần tử bất kì lớn hơn tổng của 10 phần tử còn lại. Biết các số 101 và 102 thuộc tập hợp A . Tìm tất cả các phần tử của tập hợp A .

Lời giải.

Giả sử $A = \{a_1; a_2; a_3; \dots; a_{21}\}$ với $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{21} \in \mathbb{Z}$ và $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{21}$.

Theo giả thiết ta có

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{11} > a_{12} + a_{13} + \dots + a_{21}$$

$$\Leftrightarrow a_1 > (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + \dots + (a_{21} - a_{11}) \quad (1)$$

Mặt khác với $x, y \in \mathbb{Z}$ và nếu $x < y$ thì $y \geq x + 1$. Suy ra

$$a_{12} - a_2 \geq 10, a_{13} - a_3 \geq 10, \dots, a_{21} - a_{11} \geq 10 \quad (2)$$

Nên từ (1) suy ra

$$a_1 > 10 + 10 + \dots + 10 = 100$$

Mà a_1 nhỏ nhất và $101 \in A$ nên $a_1 = 101$.

Ta có

$$101 > (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + \cdots + (a_{21} - a_{11}) \geq 100$$

$$\Rightarrow (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + \cdots + (a_{21} - a_{11}) = 100$$

Kết hợp với (2), suy ra

$$a_{12} - a_2 = a_{13} - a_3 = \cdots = a_{21} - a_{11} = 10 \quad (3)$$

$$\Rightarrow 10 = a_{12} - a_2 = (a_{12} - a_{11}) + (a_{11} - a_{10}) + \cdots + (a_3 - a_2) \geq 10$$

$$\Rightarrow a_{12} - a_{11} = a_{11} - a_{10} = \cdots = a_3 - a_2 = 1 \quad (4)$$

Ta có $a_1 = 101$ mà $102 \in A$ suy ra $a_2 = 102$.

Kết hợp với (3) và (4) suy ra $A = \{101; 102; \cdots; 121\}$. □

—————HẾT—————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 29

ĐỀ THI HSG TOÁN 9, PHÚ LỘC,
THỪA THIÊN HUẾ, 2017

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - 2 \right) : \frac{1}{x - 1}$.

- a) Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa.
- b) Rút gọn biểu thức A .
- c) Tìm giá trị của x để $\frac{2}{A}$ là số tự nhiên.

Lời giải.

a) Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{b) } A &= \left(\frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - 2 \right) : \frac{1}{x - 1} \\ &= \frac{x + 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} \cdot (x - 1) \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} \cdot (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) \\ &= (\sqrt{x} + 1)^2. \end{aligned}$$

c) Với điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$

Ta có: $A = (\sqrt{x} + 1)^2$.

Vì $A = (\sqrt{x} + 1)^2 \geq 1$ với mọi $x \geq 0$ nên $0 \leq \frac{2}{(\sqrt{x} + 1)^2} \leq 2$.

Do đó: $\frac{2}{A} = \frac{2}{(\sqrt{x} + 1)^2} \in \mathbb{N}$ khi $(\sqrt{x} + 1)^2 = 1$ hoặc $(\sqrt{x} + 1)^2 = 2$.

Mà $\sqrt{x} + 1 > 0$ nên $\sqrt{x} + 1 = 1$ hoặc $\sqrt{x} + 1 = \sqrt{2}$.

Do đó: $x = 0$ hoặc $x = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

Vậy $\frac{2}{A}$ là số tự nhiên khi $x = 0$ hoặc $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

□

Câu 2. Giải phương trình: $x^2 - 10x + 27 = \sqrt{6-x} + \sqrt{x-4}$.

Lời giải.

Điều kiện: $4 \leq x \leq 6$.

• $VT = x^2 - 10x + 27 = (x-5)^2 + 2 \geq 2$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 5$.

• $VP = \sqrt{6-x} + \sqrt{x-4} \leq \sqrt{(1^2+1^2) \left[(\sqrt{6-x})^2 + (\sqrt{x-4})^2 \right]} \Leftrightarrow VP \leq 2$.

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{6-x}} = \frac{1}{\sqrt{x-4}} \Rightarrow 6-x = x-4 \Leftrightarrow x = 5$.

$VT = VP \Leftrightarrow x = 5$ (TMDK). Vậy nghiệm của phương trình là $x = 5$.

□

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{x+1}{x^2+x+1}$.

Lời giải.

Ta có: $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$A = \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1-x^2}{x^2+x+1} = 1 - \frac{x^2}{x^2+x+1} \leq 1$ (vì $\frac{x^2}{x^2+x+1} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$, suy ra: $\max A = 1$ khi $x = 0$.

$A = \frac{x+1}{x^2+x+1} \Rightarrow 3A = \frac{3x+3}{x^2+x+1} = \frac{x^2+4x+4-(x^2+x+1)}{x^2+x+1}$.

$= \frac{(x+2)^2}{x^2+x+1} - 1 \geq -1$ (vì $\frac{(x+2)^2}{x^2+x+1} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Suy ra: $A \geq -\frac{1}{3}$, đẳng thức xảy ra khi $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Suy ra: $\min A = -\frac{1}{3}$, khi $x = -2$.

□

Câu 4. Cho hai đường thẳng: $y = x + 3$ (d_1); $y = 3x + 7$ (d_2).

a) Gọi A và B lần lượt là giao điểm của (d_1) và (d_2) với trục Oy . Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

b) Gọi J là giao điểm của (d_1) và (d_2). Tam giác OIJ là tam giác gì? Tính diện tích của tam giác đó.

Lời giải.

a) Tìm được $A(0; 3); B(0; 7)$. Suy ra $I(0; 5)$.

b) Hoành độ giao điểm J của (d_1) và (d_2) là nghiệm của phương trình: $x + 3 = 3x + 7$
 $\Rightarrow x = -2 \Rightarrow y_J = 1 \Rightarrow J(-2; 1)$.

Suy ra: $OI^2 = 0^2 + 5^2 = 25; OJ^2 = 2^2 + 1^2 = 5; IJ^2 = 2^2 + 4^2 = 20$.

$\Rightarrow OJ^2 + IJ^2 = OI^2 \Rightarrow$ tam giác OIJ là tam giác vuông tại J .

$\Rightarrow S_{\triangle OIJ} = \frac{1}{2}OI \cdot OJ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = 5$ (đvdt).



Câu 5. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi M là điểm nằm giữa A và B . Qua M vẽ dây CD vuông góc với AB , lấy điểm E đối xứng với A qua M .

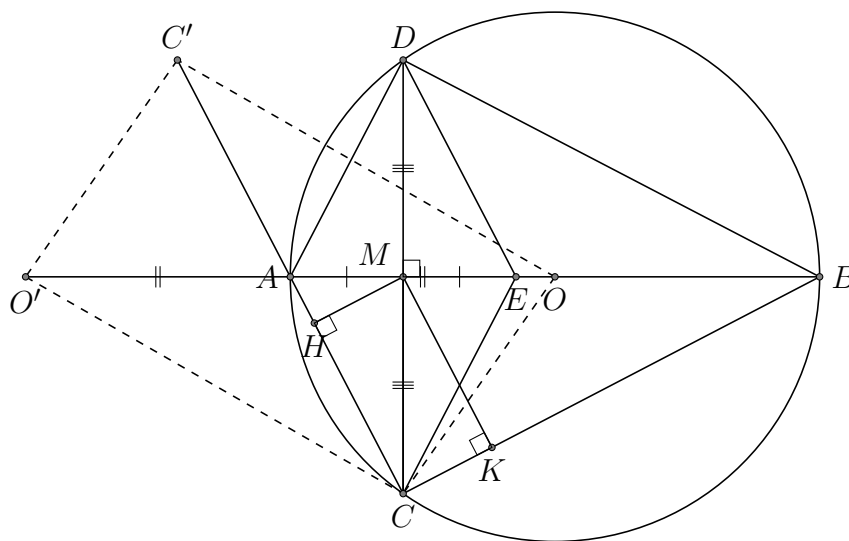
a) Tứ giác $ACED$ là hình gì? Vì sao?

b) Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên AC và BC . Chứng minh rằng:

$$\frac{HM}{HK} \cdot \frac{MK}{MC} = \frac{CD}{4R}.$$

c) Gọi C' là điểm đối xứng với C qua A . Chứng minh rằng C' nằm trên một đường tròn cố định khi M di chuyển trên đường kính AB (M khác A và B).

Lời giải.



a) Vì $CD \perp AB \Rightarrow CM = MD$.

Tứ giác $ACED$ có AE cắt CD tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.

Mà $AE \perp CD \Rightarrow$ tứ giác $ACED$ là hình thoi.

b) Vì tam giác ABC có AB là đường kính (O) nên $\triangle ABC$ vuông tại C , suy ra tứ giác $CHMK$ là hình chữ nhật.

Áp dụng hệ thức lượng vào các tam giác vuông ta có:

$$MH.AC = MA.MC \Rightarrow MH = \frac{MA.MC}{AC}.$$

$$\text{Tương tự ta có: } MK = \frac{MB.MC}{BC} \Rightarrow MH.MK = \frac{MA.MB.MC^2}{AC.BC}.$$

Mà $MA.MB = MC^2$; $AC.BC = MC.AB$ (do $\triangle ABC$ vuông tại C).

$$\Rightarrow MH.MK = \frac{MC^2.MC^2}{MC.AB} = \frac{MC^3}{AB} \Rightarrow \frac{MH.MK}{MC^2} = \frac{MC}{AB}.$$

Mà $MC = MK$ (do $CHMK$ là hình chữ nhật)

$$\Rightarrow \frac{MH.MK}{HK.MC} = \frac{MC}{AB} = \frac{2MC}{2AB} = \frac{CD}{4R}.$$

$$\text{Vậy: } \frac{HM}{HK} \cdot \frac{MK}{MC} = \frac{CD}{4R} \text{ (đpcm).}$$

c) Lấy O' đối xứng với O qua A , suy ra O' cố định.

Tứ giác $COC'O'$ là hình bình hành vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm A của mỗi đường.

Do đó $O'C' = OC = R$ không đổi.

Suy ra C' nằm trên đường tròn $(O'; R')$ cố định khi M di chuyển trên đường kính AB .

□

Câu 6. Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn: $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{c+ab}{a+b} + \frac{a+bc}{b+c} + \frac{b+ac}{a+c} \geq 2.$$

Lời giải.

Vì $a + b + c = 1$ nên

$$c + ab = c(a + b + c) + ab = (c + a)(c + b)$$

$$a + bc = a(a + b + c) + bc = (b + a)(b + c)$$

$$b + ac = b(a + b + c) + ac = (a + b)(a + c)$$

do đó BĐT cần chứng minh tương đương với: $\frac{(c+a)(c+b)}{a+b} + \frac{(b+a)(b+c)}{a+c} + \frac{(a+b)(a+c)}{b+c} \geq 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{(b+a)(b+c)}{a+c}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}\right)^2} \geq 2.$$

Mặt khác dễ thấy: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, với mọi x, y, z (*)

Áp dụng (*) ta có: $VT \geq b + c + a + b + c + a = 2$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

□

HẾT

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 30

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
TOÁN 9 NĂM HỌC 2016-2017,
THANH HÓA

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$, với $0 \leq x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x để $P = \frac{2}{7}$.

c) So sánh: P^2 và $2P$.

Lời giải.

a) Điều kiện $0 \leq x \neq 1$. Ta biến đổi biểu thức P

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\ &= \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x})^3-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\ &= \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{2} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

b) Điều kiện $0 \leq x \neq 1$. Ta có:

$$P = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1=7 \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-6=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)=0$$

Vì $\sqrt{x}+3 > 0$ nên $\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow x=4$, thỏa mãn. Vậy $P = \frac{2}{7}$ khi $x=4$.

c) Vì $x \geq 0 \Rightarrow x+\sqrt{x}+1 \geq 1$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} \leq 2 \Leftrightarrow 0 < P \leq 2 \Leftrightarrow P(P-2) \leq 0 \Leftrightarrow P^2 \leq 2P.$$

Dấu “=” xảy ra khi $P=2 \Leftrightarrow x=0$. Vậy $P^2 \leq 2P$.

□

Câu 2.

a) Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$.

- b) .Cho a, b, c là các số nguyên khác 0 thỏa mãn điều kiện: $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 3.

Lời giải.

- a) Ta có

$$\begin{aligned} 2y^2x + x + y + 1 &= x^2 + 2y^2 + xy \\ \Leftrightarrow 2y^2x + x + y + 1 - x^2 - 2y^2 - xy &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(2y^2 - y - x) &= -1 \end{aligned}$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x-1 \in \{1; -1\}$

- Nếu $x-1 = 1 \Rightarrow x = 2$. Khi đó $2y^2 - y - 2 = -1 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.
- Nếu $x-1 = -1 \Rightarrow x = 0$. Khi đó $2y^2 - y = 1 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} ; \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$$

- b) Từ giả thiết

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = 0$$

Vì $a, b, c \neq 0$ nên $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c$. Từ đó

$$(a+b)^3 = (-c)^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = -c^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

Vậy $a^3 + b^3 + c^3 : 3$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

□

Câu 3.

- a) Giải phương trình sau: $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 10x - 20$.
- b) Cho x, y là 2 số thực thỏa mãn: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = x + y + 1$

Lời giải.

- a) Đkxđ: $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 10x - 20.$$

Vì $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} \geq 0, \forall x$ nên $10x - 20 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.

Tacó

$$\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 10x - 20$$

$$\Leftrightarrow |2x + 5| + |x + 3| = 10x - 20$$

$$\Leftrightarrow 2x + 5 + x + 3 = 10x - 20 \Leftrightarrow 7x = 28 \Leftrightarrow x = 4$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 4$.

b) Ta có

$$x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 + 7(x + y) + 10 = -y^2$$

$$\Rightarrow (x + y + 2)(x + y + 5) = -y^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq x + y + 1 \leq -1$$

- $x + y + 1 = -4$ khi $x = -5; y = 0$.

- $x + y + 1 = -1$ khi $x = -2; y = 0$.

Vậy $A_{min} = -4$ khi $x = -5; y = 0$. $A_{max} = -1$ khi $x = -2; y = 0$.

□

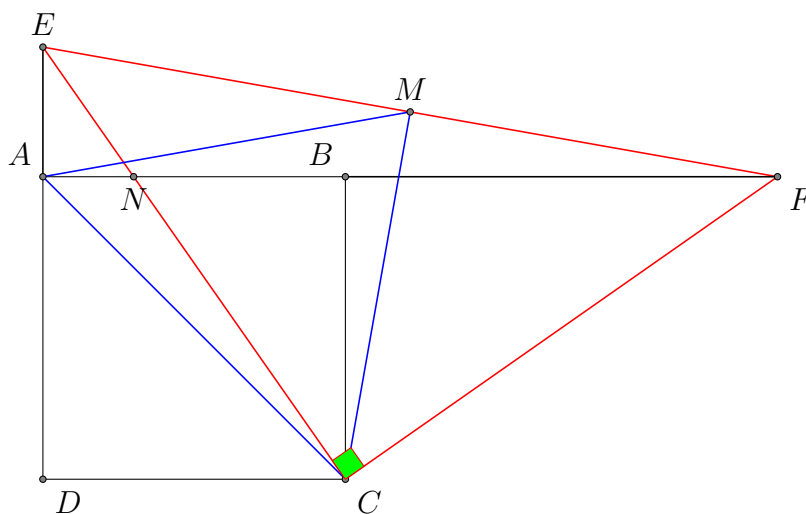
Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . N là điểm tùy ý thuộc cạnh AB . Gọi E là giao điểm của CN và DA . Vẽ tia Cx vuông góc với CE và cắt AB tại F . Lấy M là trung điểm của EF .

a) Chứng minh CM vuông góc với EF .

b) Chứng minh $NB \cdot DE = a^2$ và B, D, M thẳng hàng.

c) Tìm vị trí của N trên AB sao cho diện tích của tứ giác $AEFC$ gấp 3 lần diện tích của hình vuông $ABCD$.

Lời giải.



- a) Ta có: $\widehat{ECD} = \widehat{BCF}$ (cùng phụ với $\widehat{ECB}$)

Chứng minh được: $\triangle EDC = \triangle FBC$ (cạnh góc vuông - góc nhọn)

$\Rightarrow CE = CF \Rightarrow \triangle ECF$ cân tại C

Mà CM là đường trung tuyến nên $CM \perp FE$.

- b) Vì $\triangle EDC = \triangle FBC \Rightarrow ED = FB$.

Do $\triangle NCF$ vuông tại C. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $BC^2 = NB \cdot BF \Rightarrow a^2 = NB \cdot DE$, (đpcm).

$\triangle CEF$ vuông tại C có CM là đường trung tuyến nên $CM = \frac{FE}{2}$,
 $\triangle AEF$ vuông tại A có AM là đường trung tuyến nên $AM = \frac{FE}{2}$.

Suy ra $CM = AM = \frac{FE}{2}$. Vậy M thuộc đường trung trực của AC.

Vì ABCD là hình vuông nên B, D thuộc đường trung trực của AC.

Vậy B, D, M thẳng hàng vì cùng thuộc đường trung trực của AC, (đpcm).

- c) Đặt $DE = x$ với $x > 0$, suy ra $BF = x$.

Ta có $S_{ACFE} = S_{ACF} + S_{AEF} = \frac{1}{2}AF(AE + CB)$.

$$= \frac{1}{2}(AB + BF)(AE + AD) = \frac{1}{2}(a + x)DE = \frac{1}{2}(a + x)x.$$

$$\text{Mà } S_{ACFE} = 3S_{ABCD} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x(a + x) = 3a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a \\ x = -3a \end{cases}.$$

Do $x > 0$ và $a > 0$ suy ra nhận $x = 2a$. Vậy A là trung điểm của DE hay $AE = a$.

Vì $AE \parallel BC$ nên $\frac{AN}{NB} = \frac{AE}{BC} = 1 \Rightarrow N$ là trung điểm của AB.

Vậy với N là trung điểm của AB thì $S_{ACFE} = 3S_{ABCD}$.



Câu 5. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}.$$

Lời giải.

Vì $a, b, c > 0$ nên $\frac{a}{a+b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$.

Tương tự: $\frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c}$; $\frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}$ suy ra

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2(1)$$

Ta có $\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}$. Vì $a, b, c > 0$ nên theo bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{a + (b+c)}{2} \geq \sqrt{a(b+c)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{a+b+c} \leq \frac{1}{\sqrt{a(b+c)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a}{a+b+c} \leq \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{a}{b+c}}$$

Tương tự $\frac{2b}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{b}{a+c}}$; $\frac{2c}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{c}{b+a}}$.

Từ đó suy ra $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$.

Vậy $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$.



HẾT

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 31

ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2016-2017, SỞ
GD&ĐT THỪA THIÊN HUẾ

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1.

- a) Giả sử a là một nghiệm của phương trình $\sqrt{2}x^2 + x - 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{2a - 3}{\sqrt{2(2a^4 - 2a + 3) + 2a^2}}.$$

- b) Cho số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^2 + 2y^2 + 2xy - 2(x + 2y) + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $S = 2016x^{2017} + 2017y^{2016}$.

Lời giải.

- a) Do a là một nghiệm của phương trình $\sqrt{2}x^2 + x - 1 = 0$ nên $\sqrt{2}a^2 + a - 1 = 0$
 $\Rightarrow \sqrt{2}a^2 = 1 - a$ ($a \leq 1$) $\Rightarrow 2a^4 = (1 - a)^2 = a^2 - 2a + 1$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2a - 3}{\sqrt{2(2a^4 - 2a + 3) + 2a^2}} = \frac{2a - 3}{\sqrt{2(a^2 - 2a + 1 - 2a + 3) + 2a^2}} = \frac{2a - 3}{\sqrt{2(a^2 - 4a + 4) + 2a^2}} \\ &= \frac{2a - 3}{\sqrt{2(2 - a) + \frac{2(1 - a)}{\sqrt{2}}}} = \frac{\sqrt{2}(2a - 3)}{-4a + 6} = \frac{\sqrt{2}(2a - 3)}{-2(2a - 3)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $P = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- b) Ta có: $x^2 + 2y^2 + 2xy - 2(x + 2y) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4y^2 + 4xy - 4(x + 2y) + 2 = 0 \Leftrightarrow$
 $\left[(x + 2y)^2 - 4(x + 2y) + 4 \right] + x^2 = 2 \Leftrightarrow (x + 2y - 2)^2 + x^2 = 2$
 $\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq (x + 2y - 2)^2 \leq 2 \\ 0 \leq x^2 \leq 2 \end{cases} \Rightarrow (x + 2y - 2)^2 = x^2 = 1$

Do x, y là các số nguyên dương nên $x = y = 1$.

Vậy $S = 4033$.

□

Câu 2.

- a) Giải phương trình sau: $x^3 + 5x^2 + 10x = (3x^2 + 3x + 6) \sqrt{x+2}$.
- b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau: $x^2 - y^2 + x^2y - xy = x + 14$.

Lời giải.

a) $x^3 + 5x^2 + 10x = (3x^2 + 3x + 6) \sqrt{x+2}. (*)$

Đk: $x \geq -2$.

Với điều kiện trên ta có:

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow x(x^2 + x + 2) + 4x(x+2) = 3(x^2 + x + 2)\sqrt{x+2} \\
 &\Leftrightarrow [x(x^2 + x + 2) - (x^2 + x + 2)\sqrt{x+2}] + [4x(x+2) - 2(x^2 + x + 2)\sqrt{x+2}] = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x^2 + x + 2)(x - \sqrt{x+2}) - 2\sqrt{x+2}(x^2 + x + 2 - 2x\sqrt{x+2}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x - \sqrt{x+2})(x^2 + x + 2) - 2(x - \sqrt{x+2})^2 \cdot \sqrt{x+2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x - \sqrt{x+2})[x - 2x\sqrt{x+2} + 3(x+2)] = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x - \sqrt{x+2})[(x - \sqrt{x+2})^2 + 2(x+2)] = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} = x \\ (x - \sqrt{x+2})^2 + 2(x+2) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 2$.

b) Ta có:

$$\begin{aligned}
 x^2 - y^2 + x^2y - xy &= x + 14 \Leftrightarrow (x^2 + x^2y) - (x + xy) = y^2 + 14 \Leftrightarrow (x^2 - x)(y + 1) = y^2 + 14 \\
 \Rightarrow x^2 - x &= \frac{y^2 + 14}{y + 1} = y - 1 + \frac{15}{y + 1}.
 \end{aligned}$$

Do x nguyên dương, y nguyên dương nên $\frac{15}{y+1}$ nguyên dương.

Suy ra:
$$\begin{cases} y + 1 = 1 \rightarrow y = 0 \\ y + 1 = 3 \rightarrow y = 2 \\ y + 1 = 5 \rightarrow y = 4 \\ y + 1 = 15 \rightarrow y = 14 \end{cases}$$

Vậy các nghiệm nguyên dương của phương trình là: $(3; 2); (3; 4)$.

□

Câu 3. Cho phương trình $x^3 - 3x^2 + (4m + 3)x - 8m - 2 = 0$. (*)

- Giải phương trình (*) khi $m = 2$.
- Tìm m để phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt.
- Khi phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 , tìm m để $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2017$.

Lời giải.

- Khi $m = 2$, thì phương trình viết lại: $x^3 - 3x^2 + 11x - 18 = 0$. (**)

$$(**) \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x + 9x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 2) - x(x - 2) + 9(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - x + 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x^2 - x + 9 = 0(vn) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy khi $m = 2$ thì phương trình (*) có một nghiệm duy nhất $x = 2$.

- Tìm m để phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt.

$$x^3 - 3x^2 + (4m + 3)x - 8m - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x + 4mx - 8m + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)x^2 - x(x - 2) + 4m(x - 2) + (x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)[x^2 - x + 4m + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - x + 4m + 1 = 0(1) \end{cases}$$

Do đó, phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $x^2 - x + 4m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 3 + 4m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16m - 3 > 0 \\ m \neq -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{3}{16} \\ m \neq -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy với $m < -\frac{3}{16}$ và $m \neq -\frac{3}{4}$ thì phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt.

- Khi phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 , tìm m để $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2017$.

$$\text{Phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{3}{16} \\ m \neq -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Khi đó phương trình luôn có một nghiệm bằng 2, giả sử đó là $x_1 = 2$.

Theo định lý Viet, ta có: $x_2 + x_3 = 1, x_2x_3 = 4m + 1$.

Do đó:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = 4 + 1 - 2(4m + 1) = -8m + 3$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2017 \Leftrightarrow -8m + 3 = 2017 \Leftrightarrow m = -\frac{1007}{4}$$

Vậy $m = -\frac{1007}{4}$ là giá trị cần tìm.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn với $AB < AC$ và AA', BB', CC' là ba đường cao. Vẽ đường tròn tâm O đường kính BC . Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn O (M, N là các tiếp điểm). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC , M' là giao điểm thứ hai của $A'N$ là đường tròn O , K là giao điểm của OH và $B'C'$. Chứng minh rằng:

a) BC là đường trung trực của đoạn thẳng MM' .

b) Ba điểm M, N, H thẳng hàng.

c) $\frac{KB'}{KC'} = \left(\frac{HB'}{HC'}\right)^2$.

Lời giải.

a)

Do tính chất tiếp tuyến và tính chất đường cao, $\widehat{AMO} = \widehat{ANO} = \widehat{AA'O} = 90^\circ$ nên 5 điểm O, A, A', M, N cùng nằm trên đường tròn đường kính AO .

Suy ra

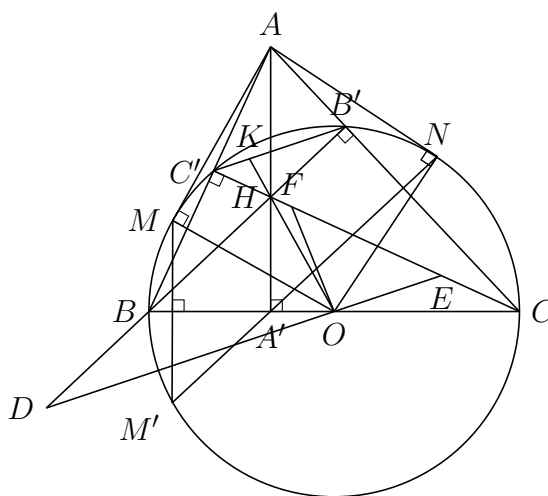
$$\widehat{AA'N} = \widehat{AMN}.$$

$$\text{Mà } \widehat{AMN} =$$

$$\widehat{MM'N} (\text{cùng}$$

$$\text{chắn } \widehat{MN}). \text{ Suy}$$

$$\text{ra } \widehat{MM'N} = \widehat{AA'N}.$$



Do đó $MM' \parallel AA'$.

Mặt khác $BC \perp AA'$ nên $MM' \perp BC$. Vì BC là đường kính của đường tròn (O) mà BC vuông góc với dây cung MM' nên BC là đường trung trực của MM' .

- b) Ta có: $\triangle AMC' \sim \triangle ABM$ vì có chung góc $\widehat{MAB}$ và $\widehat{AMC'} = \widehat{ABM}$.

Do đó: $\frac{AM}{AC'} = \frac{AB}{AM} \Rightarrow AM^2 = AB \cdot AC'$. $\triangle AC'H \sim \triangle AA'B$ nên $\frac{AC'}{AH} = \frac{AA'}{AB} \Rightarrow AC' \cdot AB = AA' \cdot AH$.

Do đó $AM^2 = AA' \cdot AH \Rightarrow \frac{AH}{AM} = \frac{AM}{AA'}$. Mà hai tam giác AHM và AMA' có chung góc $\widehat{A'AM}$ nên chúng đồng dạng. Suy ra $\widehat{AMH} = \widehat{AA'M}$ (1).

Mặt khác, tứ giác $AMA'N$ nội tiếp đường tròn đường kính AO nên $\widehat{AA'M} = \widehat{ANM}$.

Ta lại có AM, AN là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$.

Như vậy $\widehat{AMN} = \widehat{AA'M}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AMH} = \widehat{AMN}$.

Nhận xét rằng H và N nằm cùng một phía đối với đường thẳng AM , nên tia MH trùng với tia MN hay M, H, N thẳng hàng.

- c) Gọi d là đường thẳng qua O và song song với $B'C'$, cắt BB' , CC' lần lượt tại D, E .

Ta có: $\frac{KB'}{OD} = \frac{KH}{OH} = \frac{KC'}{OE} \Rightarrow \frac{KB'}{KC'} = \frac{OD}{OE}$ (3).

Mà $\widehat{BDO} = \widehat{ECO}$ (cùng bằng $\widehat{BB'C'}$) và $\widehat{BOD} = \widehat{EOC}$ nên $\triangle DBO \sim \triangle CEO$.

Do đó $\frac{OD}{OB} = \frac{OC}{OE} \Rightarrow OD \cdot OE = OB \cdot OC = OC^2 \Rightarrow \frac{OD}{OE} = \frac{OC^2}{OE^2}$ (4).

Trên dây cung CC' , lấy điểm F khác E sao cho $OF = OE$.

Lúc đó $\widehat{OFC} = \widehat{B'C'H}$ (cùng bằng $\widehat{OEC'}$).

Mặt khác $\widehat{HB'C'} = \widehat{OCF}$ (cùng chắn cung $\widehat{BC'}$) nên $\triangle B'C'H \sim \triangle CFO$.

Suy ra $\frac{HB'}{HC'} = \frac{OC}{OF} \Rightarrow \frac{HB'}{HC'} = \frac{OC}{OE}$ (5).

Từ (3), (4), (5) ta được $\frac{KB'}{KC'} = \left(\frac{HB'}{HC'}\right)^2$.

□

Câu 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ; T, H lần lượt là chân đường cao kẻ từ A và B của tam giác ABC .

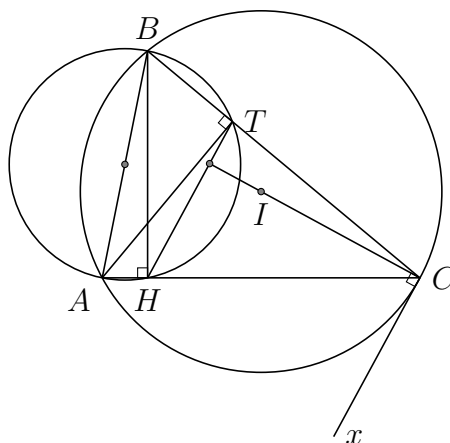
- a) Chứng minh bốn điểm A, B, T, H cùng nằm trên một đường tròn. Chứng minh:

$$CH \cdot CA = CT \cdot CB$$

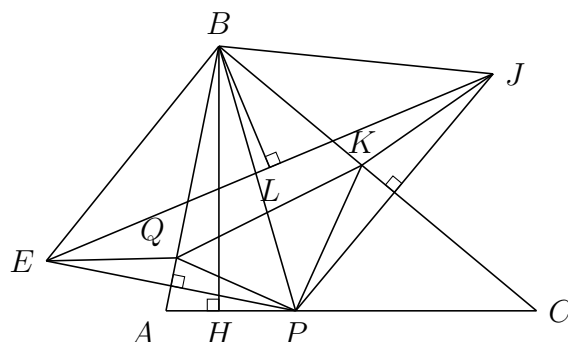
- b) Chứng minh $IC \perp HT$.

- c) Tìm trên các cạnh BC, AC, AB lần lượt các điểm K, P, Q có chu vi nhỏ nhất.

Lời giải.



- a) Ta có: $\widehat{AHB} = \widehat{ATB} = 90^\circ \Rightarrow H, T$ cùng nhìn AB dưới một góc vuông nên H, T thuộc đường tròn đường kính AB .
 $\Rightarrow \triangle CTA \sim \triangle CHB$ (vì hai tam giác vuông có $\widehat{ACB}$ chung).
 Do đó: $\frac{CH}{CT} = \frac{CB}{CA} \Leftrightarrow CH.CA = CT.CB$
- b) Gọi Cx là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại C .
 Ta có: $\widehat{HCx} = \widehat{ABC}$ (cùng chắn cung $\widehat{AC}$)
 Ta lại có: $\widehat{ABC} = \widehat{THC}$ (vì tứ giác $AHTB$ nội tiếp)
 Suy ra: $\widehat{HCx} = \widehat{THC} \Rightarrow HT \parallel Cx$. Mà $IC \perp Cx$. Vậy $IC \perp HT$.
- c) Gọi E là điểm đối xứng của P qua AB , J là điểm đối xứng của P qua BC



Ta có: $BE = BJ = BP$; $\widehat{EBJ} = 2\widehat{ABC}$; $EQ = PQ$, $PK = JK$.

Vẽ $BL \perp EJ$ ($L \in EJ$). $\triangle BEJ$ cân tại B ($BE = BJ$); BL là đường cao $\Rightarrow BL$ là tia phân giác và là trung tuyến $\Rightarrow \widehat{EBL} = \widehat{ABC}$, $EJ = 2EL$.

Trong tam giác EBL vuông tại L , ta có: $EL = BE \cdot \sin \widehat{EBL} \Rightarrow EJ = 2BP \cdot \sin \widehat{ABC}$ (vì $EJ = 2EL$, $BP = BE$)

Gọi $C_{\triangle KPQ}$ là chu vi của tam giác KPQ , ta có:

$$C_{\triangle KPQ} = KQ + QP + KP = EQ + QK + KJ \geq EJ = 2BP \cdot \sin \widehat{ABC} \geq 2BH \cdot \sin \widehat{ABC} \\ \Leftrightarrow C_{\triangle KPQ} \geq 2BH \cdot \sin \widehat{ABC} \text{ (không đổi)}$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $P \equiv H$ và E, Q, K, J thẳng hàng.

Vậy P là chân đường cao H kẻ từ B và Q, K lần lượt là giao điểm của EJ và hai cạnh AB và AC của tam giác ABC .

□

Câu 6. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 3.$$

Lời giải.

$$\text{Do } x, y, z \text{ là các số thực dương nên } \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 3 \Leftrightarrow \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \right)^2 \geq 9 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{xy}{z} \right)^2 + \left(\frac{yz}{x} \right)^2 + \left(\frac{zx}{y} \right)^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 \geq 3 \text{ (vì } x^2 + y^2 + z^2 = 3)$$

$$\text{Áp dụng BĐT Cô-si, ta có: } \Leftrightarrow \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 \geq 2\sqrt{\left(\frac{xy}{z}\right)^2 \cdot \left(\frac{yz}{x}\right)^2} = 2y^2 \quad (1).$$

$$\text{Tương tự: } \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 \geq 2z^2 \quad (2); \quad \left(\frac{zx}{y}\right)^2 + \left(\frac{xy}{z}\right)^2 \geq 2x^2 \quad (3).$$

Cộng (1), (2), (3) về theo vế, ta có:

$$2 \left[\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 \right] \geq 2(x^2 + y^2 + z^2) = 6 \text{ (do } x^2 + y^2 + z^2 = 3)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 \geq 3 \Leftrightarrow P \geq 3$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$

□

—————HẾT—————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 32

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
TOÁN 9 NĂM HỌC 2016-2017,
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a - b = 7, b - c = 3$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{a^2 - c^2 - 2ab + 2bc}$.

Lời giải.

Từ $a - b = 7, b - c = 3 \Rightarrow a - c = 10$. Ta có:

$$P = \frac{2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ba - ca)}{2(a^2 - c^2 - 2ab + 2bc)} = \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{2[(a - b)^2 - (b - c)^2]} = \frac{7^2 + 3^2 + 10^2}{2(7^2 - 3^2)} = \frac{79}{40}.$$

□

Câu 2. Giải phương trình: $(2x - 1)\sqrt{x + 3} = x^2 + 3$ (1).

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq -3$.

$$(1) \Leftrightarrow 2x\sqrt{x + 3} - \sqrt{x + 3} = x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 + 3 - 2x\sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x\sqrt{x + 3} + x + 3) - (x - \sqrt{x + 3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{x + 3})(x - \sqrt{x + 3} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x + 3} = 0 \\ x - \sqrt{x + 3} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \sqrt{x + 3} \\ x \geq 1 \\ x - 1 = \sqrt{x + 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = x + 3 \\ x \geq 1 \\ (x - 1)^2 = x + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 3 = 0 \\ x \geq 1 \\ x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Kết quả cuối cùng, nghiệm của phương trình (1) là: $S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{13}}{2}; \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right\}$.

□

Câu 3. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(y-1) + y(x+1) = 6 \\ (x-1)(y+1) = 1 \end{cases}.$$

Lời giải.

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} xy - x + xy + y = 6 \\ xy + x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3xy = 8 \\ 3xy + 3x - 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x(-3y) = -24 \\ 3x + (-3y) = -2 \end{cases}.$$

Khi đó $(3x)$ và $(-3y)$ là nghiệm của phương trình:

$$X^2 + 2X - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 4 \\ X = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{-4}{3} \end{cases} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $\left(\frac{4}{3}; 2\right), \left(-2; \frac{-4}{3}\right)$. □

Câu 4.

- a) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $\frac{x}{1+x} + \frac{2y}{1+y} = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = xy^2$.
- b) Tìm x, y nguyên thỏa mãn phương trình: $(x+y)(x+2y) = x+5$.

Lời giải.

- a) Với $x, y > 0$ ta có $\frac{x}{1+x} + \frac{2y}{1+y} = 1 \Leftrightarrow x + xy + 2y + 2xy = 1 + xy + x + y \Leftrightarrow y + 2xy = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $1 = y + 2xy \geq 2\sqrt{y \cdot 2xy} = 2\sqrt{2xy^2}$.

$$\Rightarrow 1 \geq 8xy^2 \Rightarrow P = xy^2 \leq \frac{1}{8}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} y = 2xy \\ y + 2xy = 1 \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

- b) Ta có $(x+y)(x+2y) = x+5 \Leftrightarrow x^2 + 3xy + 2y^2 - x - 5 = 0$
 $\Leftrightarrow 4x^2 + 12xy + 8y^2 - 4x - 20 = 0 \Leftrightarrow [2x + (3y-1)]^2 - (y-3)^2 = 12$
 $\Leftrightarrow (2x + 2y + 2)(2x + 4y - 4) = 12 \Leftrightarrow (x + y + 1)(x + 2y - 2) = 3.$

Với x, y nguyên nên ta có bảng sau:

$x+2y-2$	1	3	-1	-3
$x+y+1$	3	1	-3	-1
$y-3$	-2	2	2	-2
y	1	5	5	1
x	1	-5	-9	-3

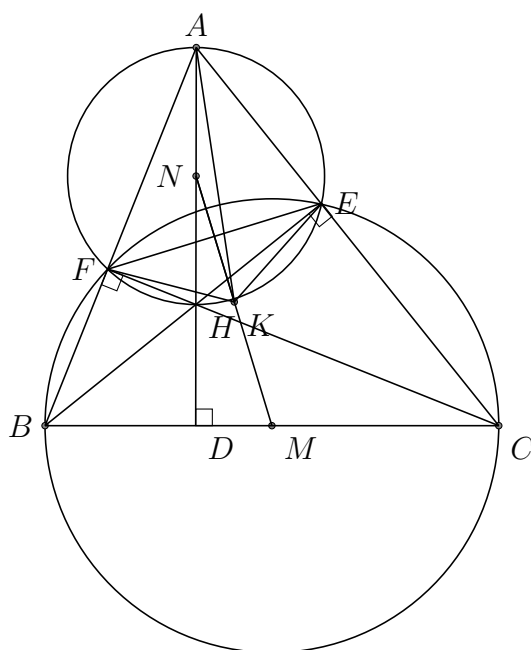
Vậy phương trình có nghiệm: $S = \{(1; 1), (-5; 5), (-9; 5), (-3; 1)\}$.

□

Câu 5.

- a) Cho tam giác nhọn ABC có H là trực tâm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AH . Đường phân giác trong góc A cắt MN tại K . Chứng minh rằng AK vuông góc với HK .
- b) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi AH, AD lần lượt là đường cao, đường phân giác trong của tam giác ABC ($H, D \in BC$). Tia AD cắt (O) ở E , tia EH cắt (O) ở F và tia FD cắt (O) ở K . Chứng minh rằng AK là đường kính của đường tròn tâm O .

Lời giải.

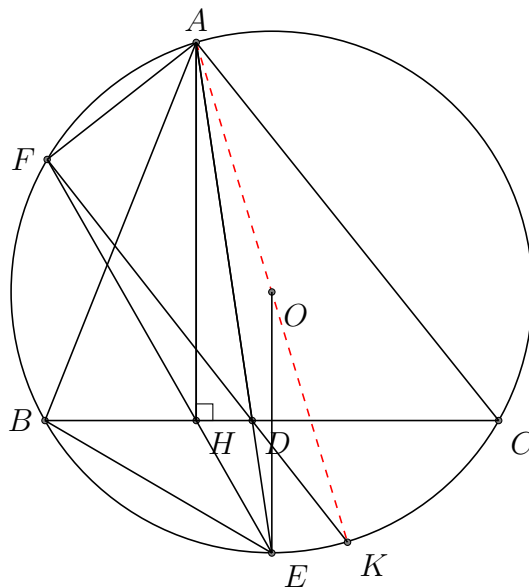


- a) Gọi ba đường cao của tam giác ABC là AD, BE, CF . Ta dễ dàng chứng minh được tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC có tâm M , và tứ giác $AFHE$ nội tiếp đường tròn đường kính AH có tâm N .

Giả sử đường tròn (N) cắt NM tại K' , Suy ra $\widehat{AK'H} = 90^\circ \Rightarrow AK' \perp HK'$.

Ta có NM là đường trung trực của dây cung chung FE mà $K' \in NM \Rightarrow K'F = K'E$,
 $\Rightarrow \widehat{K'EF} = \widehat{K'FE}$, mà $\widehat{K'FE} = \widehat{K'AE}$ và $\widehat{K'EF} = \widehat{K'AF}$ (do tứ giác $AFK'E$ nội tiếp).

$\Rightarrow \widehat{K'AE} = \widehat{K'AF}$, hay AK' là phân giác trong của góc A , mà AK là phân giác trong của góc A (gt) và $K, K' \in NM \Rightarrow K \equiv K' \Rightarrow AK \perp HK$.



b) Ta có $\widehat{BHF} = \widehat{HBE} + \widehat{HEB} = \widehat{CAE} + \widehat{FAB} = \widehat{BAD} + \widehat{FAB} = \widehat{FAD}$.

Suy ra tứ giác $AFHD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AFD} = \widehat{AHD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AFK} = 90^\circ$.

Mà $\widehat{AFK}$ là góc nội tiếp của đường tròn tâm O , suy ra AK là đường kính của đường tròn tâm O .

□

Câu 6. Trong tuần, mỗi ngày Nam chỉ chơi một môn thể thao. Nam chạy ba ngày một tuần nhưng không bao giờ chạy hai ngày liên tiếp. Vào thứ Hai, anh ta chơi bóng bàn và hai ngày sau đó anh ta chơi bóng đá. Nam còn đi bơi và chơi cầu lông, nhưng không bao giờ anh ta chơi cầu lông sau ngày anh ta chạy hoặc bơi. Hỏi ngày nào trong tuần Nam đi bơi?

Lời giải.

Vào ngày thứ Hai anh ta chơi bóng bàn và hai ngày sau đó anh ta chơi bóng đá.

Nếu 0 ngày sau đó anh ta chơi bóng đá thì ngày chơi bóng đá là ngày thứ Hai.

Nếu 1 ngày sau đó anh ta chơi bóng đá thì ngày chơi bóng đá là ngày thứ Ba.

Đề bài cho hai ngày sau đó anh ta chơi bóng đá nên ngày chơi bóng đá là ngày thứ Tư.

Suy ra ba ngày chạy chỉ là ngày:

- Thứ Ba, thứ Năm, thứ Bảy . Khi đó ngày chơi cầu lông là ngày thứ Sáu hoặc Chủ Nhật (không xảy ra vì sau ngày chạy).
- Thứ Ba, thứ Năm, Chủ Nhật. Khi đó ngày chơi cầu lông là thứ Sáu (không xảy ra vì sau ngày chạy thứ Năm) hoặc thứ Bảy (không xảy ra vì khi đó sau ngày bơi thứ Sáu).
- Thứ Ba, thứ Sáu, Chủ Nhật. Khi đó ngày chơi cầu lông là thứ Năm và ngày bơi là thứ Bảy (thỏa mãn điều kiện đề bài). Vậy thứ Bảy là ngày trong tuần Nam đi bơi. $\square$

—————HẾT—————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 33

ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2017-2018, BÌNH
ĐỊNH

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1.

1) Cho biểu thức $P = \frac{2m + \sqrt{16m} + 6}{m + 2\sqrt{m} - 3} + \frac{\sqrt{m} - 2}{\sqrt{m} - 1} + \frac{3}{\sqrt{m} + 3} - 2$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm $m \in \mathbb{N}$ để $P \in \mathbb{N}$.

2) Cho biểu thức $P = (a + b)(b + c)(c + a) - abc$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng nếu $(a + b + c) : 4$ thì $P : 4$.

Lời giải.

1a) Điều kiện: $\begin{cases} m \geq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{2m + 4\sqrt{m} + 6}{(\sqrt{m} - 1)(\sqrt{m} + 3)} + \frac{(\sqrt{m} - 2)(\sqrt{m} + 3)}{(\sqrt{m} - 1)(\sqrt{m} + 3)} + \frac{3(\sqrt{m} - 1)}{(\sqrt{m} - 1)(\sqrt{m} + 3)} - \frac{2(\sqrt{m} - 1)(\sqrt{m} + 3)}{(\sqrt{m} - 1)(\sqrt{m} + 3)} \\ &= \frac{2m + 4\sqrt{m} + 6 + m + \sqrt{m} - 6 + 3\sqrt{m} - 3 - 2m - 4\sqrt{m} + 6}{(\sqrt{m} - 1)(\sqrt{m} + 3)} \\ &= \frac{m + 4\sqrt{m} + 3}{(\sqrt{m} - 1)(\sqrt{m} + 3)} = \frac{(\sqrt{m} + 1)(\sqrt{m} + 3)}{(\sqrt{m} - 1)(\sqrt{m} + 3)} = \frac{\sqrt{m} + 1}{\sqrt{m} - 1}. \end{aligned}$$

1b) Ta có $P = \frac{\sqrt{m} + 1}{\sqrt{m} - 1} = \frac{\sqrt{m} - 1 + 2}{\sqrt{m} - 1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{m} - 1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{m} - 1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sqrt{m} - 1$ là ước dương của 2 $\Leftrightarrow \sqrt{m} - 1 \in \{1; 2\} \Leftrightarrow m \in \{4; 9\}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $m = 4, m = 9$ là các giá trị cần tìm.

2) Đặt $a + b + c = 4k$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow a + b = 4k - c; b + c = 4k - a; a + c = 4k - b$.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= (a+b)(b+c)(c+a) - abc = (4k-c)(4k-a)(4k-b) - abc \\
 &= (16k^2 - 4ak - ack + ac)(4k-b) - abc \\
 &= 64k^3 - 16bk^2 - 16ak^2 + 4abc - 16ck^2 + 4bck + 4ack - abc - abc \\
 &= 4(16k^3 - 4bk^2 - 4ak^2 + abk - 4ck^2 + bck + ack) - 2abc \quad (*)
 \end{aligned}$$

Giả sử a, b, c đều chia 2 dư 1 $\Rightarrow a+b+c$ chia 2 dư 1 (1).

Mà $a+b+c:4 \Rightarrow a+b+c:2$ (theo giả thiết) (2).

Do đó (1) và (2) mâu thuẫn $\Rightarrow$ Điều giả sử là sai.

$\Rightarrow$ Trong 3 số a, b, c có ít nhất một số chia hết cho 2 $\Rightarrow 2abc:4$ (**).

Từ (*) và (**) $\Rightarrow P:4$.

□

Câu 2.

- 1) Chứng minh rằng với mọi số thực x, y dương, ta luôn có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$.
- 2) Cho phương trình $2x^2 + 3mx - \sqrt{2} = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = (x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{1+x_1^2}{x_1} - \frac{1+x_2^2}{x_2} \right)^2$.

Lời giải.

- 1) Ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ (đúng). Vậy bất đẳng thức được chứng minh.
- 2) Phương trình có a, c trái dấu nên luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Theo định lý Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = -\frac{3m}{2}$ và $x_1 x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
 M &= (x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{1+x_1^2}{x_1} - \frac{1+x_2^2}{x_2} \right)^2 \\
 &= (x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{1+x_1^2}{x_1} - \frac{1+x_2^2}{x_2} \right)^2 = (x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{x_2 + x_1^2 x_2 - x_1 - x_1 x_2^2}{x_1 x_2} \right)^2 \\
 &= (x_1 - x_2)^2 + \left[\frac{x_2 - x_1 + x_1 x_2 (x_1 - x_2)}{x_1 x_2} \right]^2 = (x_1 - x_2)^2 + \frac{(x_1 - x_2)^2 \cdot (x_1 x_2 - 1)^2}{(x_1 x_2)^2} \\
 &= (x_1 - x_2)^2 \cdot \left[1 + \frac{(x_1 x_2 - 1)^2}{(x_1 x_2)^2} \right] = [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] \cdot \left[1 + \frac{(x_1 x_2 - 1)^2}{(x_1 x_2)^2} \right] \\
 &= \left[\left(\frac{-3m}{2} \right)^2 - 4 \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} \right] \cdot \left[1 + \frac{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - 1 \right)^2}{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right)^2} \right] = \left(9 + \frac{9\sqrt{2}}{2} \right) m^2 + 8\sqrt{2} + 8 \geq 8\sqrt{2} + 8.
 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $m = 0$.

Vậy GTNN của M là $8\sqrt{2} + 8$ khi $m = 0$.

□

Câu 3. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right)$.

Lời giải.

Áp dụng BDT Côsi cho các số dương x^2 và yz ta có

$$x^2 + yz \geq 2\sqrt{x^2 yz} = 2x\sqrt{yz} \Rightarrow \frac{1}{x^2 + yz} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{yz}}$$

Tương tự ta có $\frac{1}{y^2 + xz} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y\sqrt{xz}}$ và $\frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z\sqrt{xy}}$.

Suy ra

$$\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{y\sqrt{xz}} + \frac{1}{z\sqrt{xy}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{yz} + \sqrt{xz} + \sqrt{xy}}{xyz} \quad (1)$$

Ta có $\sqrt{yz} + \sqrt{xz} + \sqrt{xy} \leq x + y + z$ (2). Thật vậy

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow 2\sqrt{yz} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{xy} \leq 2x + 2y + 2z \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{z} - \sqrt{x})^2 + (\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng}) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $x = y = z$.

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x + y + z}{xyz} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} \right)$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$. □

Câu 4.

1) Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R và M là một điểm di động trên cung nhỏ BC của đường tròn đó.

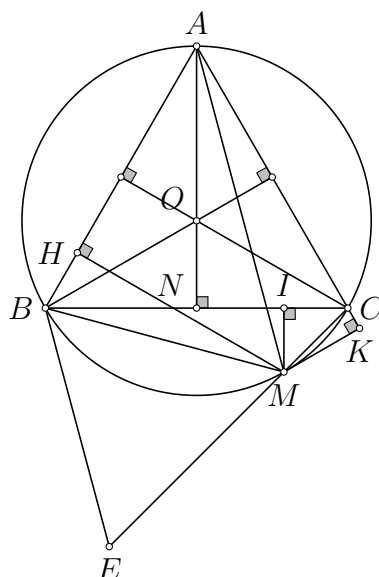
a) Chứng minh rằng $MB + MC = MA$.

b) Gọi H, I, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB, BC, CA . Gọi S, S' lần lượt là diện tích của $\triangle ABC$ và $\triangle MBC$. Chứng minh rằng khi M di động ta luôn có đẳng thức sau:

$$MH + MI + MK = \frac{2\sqrt{3}(S + 2S')}{3R}$$

2) Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn và AD, BE, CF là các đường cao. Lấy M trên đoạn FD , lấy N trên tia DE sao cho $\widehat{MAN} = \widehat{BAC}$. Chứng minh rằng MA là tia phân giác của $\widehat{NMF}$.

Lời giải.



- 1a) Trên tia đối của tia MC lấy điểm E sao cho $ME = MB$ (1).

Ta có $\widehat{BMC}$ là góc nội tiếp chắn cung $\widehat{BAC}$ của đường tròn (O) nên $\widehat{BMC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 240^\circ = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BME} = 180^\circ - \widehat{BMC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle BME$ đều $\Rightarrow BE = BM = EM$.

Xét $\triangle BMA$ và $\triangle BEC$, ta có:

$$BM = BE \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{BAM} = \widehat{BCE} \text{ (cùng chắn cung nhỏ } BM)$$

$$BA = BC \text{ (do } \triangle ABC \text{ đều)}$$

$$\text{Vậy } \triangle BMA = \triangle BEC \Rightarrow MA = EC \Rightarrow MB + MC = ME + MC = EC = MA.$$

- 1b) Gọi N là giao điểm của AO và BC .

Vì $\triangle ABC$ đều nên O là trọng tâm của $\triangle ABC \Rightarrow A, O, N$ thẳng hàng và $AN = \frac{3}{2}AO = \frac{3}{2}R$. Ta có $AB = \frac{AN}{\sin \widehat{ABN}} = \frac{3}{2}R : \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$.

Ta lại có:

$$S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2}MH \cdot AB \Rightarrow MH = \frac{2S_{\triangle MAB}}{AB} = \frac{2S_{\triangle MAB}}{R\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot S_{\triangle MAB}}{3R}$$

$$S_{\triangle MBC} = \frac{1}{2}MI \cdot BC \Rightarrow MI = \frac{2S_{\triangle MBC}}{BC} = \frac{2S_{\triangle MBC}}{R\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot S_{\triangle MBC}}{3R}$$

$$S_{\triangle MAC} = \frac{1}{2}MK \cdot AC \Rightarrow MK = \frac{2S_{\triangle MAC}}{AC} = \frac{2S_{\triangle MAC}}{R\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot S_{\triangle MAC}}{3R}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow MH + MI + MK &= \frac{2\sqrt{3}}{3R} \cdot (S_{\triangle MAB} + S_{\triangle MBC} + S_{\triangle MAC}) \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3R} \cdot (S_{\triangle ABC} + S_{\triangle MBC} + S_{\triangle MBC}) \\
&= \frac{2\sqrt{3}(S + 2S')}{3R}.
\end{aligned}$$

2)

Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt DE tại K .

Tứ giác $AEDB$ có D, E cùng nhìn AB dưới một góc vuông nên $AEDB$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{BAC}$.

Mà $\widehat{MKD} = \widehat{CDE}$ (vì $MK \parallel BC$) nên $\widehat{MKD} = \widehat{BAC} = \widehat{MAN} \Rightarrow$ tứ giác $AMKN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{AKN}$.

Tứ giác $FDCA$ có F, D cùng nhìn AC dưới một góc vuông nên $FDCA$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FDB} = \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{FDB} = \widehat{EDC} (= \widehat{BAC}) \Rightarrow \widehat{MDA} = \widehat{KDA}$.

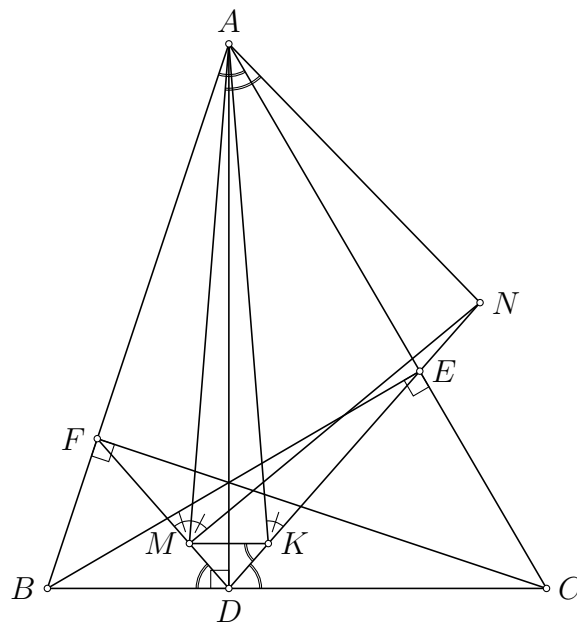
$\triangle DMK$ có DA là phân giác vừa là đường cao nên cân tại $D \Rightarrow DM = DK$.

$\triangle AMD = \triangle AKD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{AKD} \Rightarrow \widehat{FMA} = \widehat{AKN}$.

Mà $\widehat{AKN} = \widehat{AMN}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ $\widehat{AN}$). Suy ra $\widehat{FMA} = \widehat{AMN}$ hay MA là tia phân giác của $\widehat{NMF}$.

□

HẾT



TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 34

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
TOÁN 9 NĂM HỌC 2017-2018,
HẢI DƯƠNG

Họ và tên thí sinh: Lớp:

Câu 1.

- a) Cho biểu thức $P = \sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ với $-1 \leq x \leq 1$. Tính giá trị của biểu thức P khi $x = -\frac{1}{2017}$.
- b) Cho a, b, c là ba số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 2$.
 Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{a}}{1+a} + \frac{\sqrt{b}}{1+b} + \frac{\sqrt{c}}{1+c} = \frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}$.

Lời giải.

a) $P = \sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}}$
 $= \sqrt{1-x} \left(\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \right)$ (vì $-1 \leq x \leq 1$).

Suy ra: $P^2 = (1-x) \left(2 + 2\sqrt{1-(1-x^2)} \right) = 2(1-x)(1+|x|)$.

Mà $P > 0$ nên $P = \sqrt{2(1-x)(1+|x|)}$.

Thay $x = -\frac{1}{2017}$ ta được $P = \frac{2018}{2017}\sqrt{2}$.

b) Đặt $x = \sqrt{a}; y = \sqrt{b}; z = \sqrt{c} \Rightarrow xy + yz + zx = 1 \Rightarrow a + 1 = (x + y)(x + z)$.

Tương tự ta có $b + 1 = (y + z)(y + x); c + 1 = (z + x)(z + y)$.

Do đó $\frac{\sqrt{a}}{1+a} + \frac{\sqrt{b}}{1+b} + \frac{\sqrt{c}}{1+c} = \frac{2(xy + yz + zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}$.

□

Câu 2.

a) Giải phương trình: $2x^2 - 2x + 1 = (2x + 1)(\sqrt{x^2 - x + 2} - 1)$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + (y + 1)^2 = xy + x + 1 \\ 2x^3 = x + y + 1 \end{cases}$$

Lời giải.

$$a) 2x^2 - 2x + 1 = (2x + 1)(\sqrt{x^2 - x + 2} - 1) \Leftrightarrow (x^2 - x + 2) + x^2 - x - 1 = (2x + 1)(\sqrt{x^2 - x + 2} - 1) \quad (1).$$

Đặt $t = (\sqrt{x^2 - x + 2} - 1) \Rightarrow x^2 - x + 2 = (t + 1)^2$. Thay vào phương trình (1) ta có:

$$(t - x)(t - x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = x \\ t = x - 1 \end{cases}.$$

$$\text{Với } t = x \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - x - 2 = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Với } t = x - 1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - x - 2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{1}{3}; x = 2$.

$$b) \begin{cases} x^2 + (y + 1)^2 = xy + x + 1 \\ 2x^3 = x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y + 1)^2 - x(y + 1) = 1 \\ 2x^3 = x + y + 1 \end{cases}.$$

Đặt $t = y + 1$ ta được:

$$\begin{cases} x^2 + t^2 - xt = 1 \\ 2x^3 = (x + t)(x^2 + t^2 - xt) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + t^2 - xt = 1 \\ x = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x = 1 \\ t = x = -1 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(1; 0); (-1; -2)$.

□

Câu 3.

$$a) \text{ Tìm các cặp số nguyên } (x; y) \text{ thỏa mãn: } 2x^3 + 2y^2 + 3x - 6y = 5xy - 7.$$

$$b) \text{ Tìm tất cả các số tự nhiên } n \text{ sao cho } n^2 + 2n + \sqrt{n^2 + 2n + 18} + 9 \text{ là số chính phương.}$$

Lời giải.

$$a) \text{ Ta có } 2x^3 + 2y^2 + 3x - 6y = 5xy - 7 \Leftrightarrow (x - 2y)(2x - y + 3) = -7.$$

Xét tất cả trường hợp ta có cặp nghiệm nguyên $(x; y)$ là: $(3; 2); (-5; -6); (-7; -4); (1; 4)$.

$$b) n^2 + 2n + \sqrt{n^2 + 2n + 18} + 9 \text{ là số chính phương.}$$

Suy ra $\sqrt{n^2 + 2n + 18}$ là số tự nhiên.

$$\text{Đặt } \sqrt{n^2 + 2n + 18} = k \quad (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (k + n + 1)(k - n - 1) = 17.$$

Vì k, n đều là số tự nhiên và $k + n + 1 > k - n - 1$ nên ta xét trường hợp sau:

$$\begin{cases} k + n + 1 = 17 \\ k - n - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 9 \\ n = 7 \end{cases}.$$

Khi đó: $n^2 + 2n + \sqrt{n^2 + 2n + 18} + 9 = 81 = 9^2$ là số chính phương.

Vậy $n = 7$ thỏa yêu cầu bài toán.

□

Câu 4.

- 1) Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$, nội tiếp trong đường tròn (O) . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tia AI cắt (O) tại J khác A . Đường thẳng JO cắt BC tại E , và cắt (O) tại K khác J .
 - a) Chứng minh rằng J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC và $JE \cdot JK = JI^2$.
 - b) Tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại S . Chứng minh rằng $SJ \cdot EK = SK \cdot EJ$.
 - c) Đường thẳng SA cắt (O) tại D khác A , đường thẳng DI cắt (O) tại M khác D . Chứng minh rằng JM đi qua trung điểm của đoạn thẳng IE .
- 2) Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD ; AF cắt DE tại P ; BF cắt CE tại Q . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

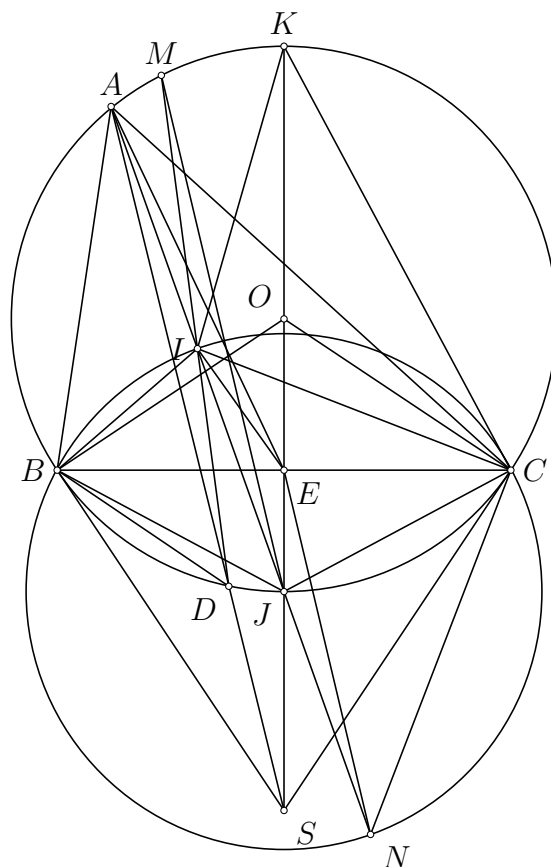
$$T = \frac{FA}{FP} + \frac{FB}{FQ} + \frac{ED}{EP} + \frac{EC}{EQ}.$$

Lời giải.

1)

- a) Dễ thấy J là điểm chính giữa của cung BC nên E là trung điểm của BC , và JK chính là một đường kính của đường tròn (O) .

Trong tam giác AIB , góc $\angle BIJ$ là góc ngoài đỉnh I nên $\angle BIJ = \angle BAI + \angle ABI = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$. Lại có $\angle IBJ = \angle IBC + \angle CBJ = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$. Nên tam giác JIB cân tại J , hay $JI = JB$. Chứng minh tương tự ta cũng có $JI = JC$. Do đó, J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC . Từ đó, áp dụng thêm hệ thức lượng trong tam giác vuông JCK , ta dễ dàng thu được $JI^2 = JC^2 = JE \cdot JK$.



- b) Do SO là đường trung trực của BC nên S nằm trên đường thẳng JK . Bằng thức cần chứng minh tương đương với $\frac{SJ}{SK} = \frac{EJ}{EK}$. Mà $\frac{SJ}{SK} = \frac{SJ}{SC} \cdot \frac{SC}{SK} = \left(\frac{CJ}{CK}\right)^2 = \frac{JC^2}{KC^2} = \frac{JE \cdot JK}{KE \cdot KJ} = \frac{EJ}{EK}$, nên ta có điều cần chứng minh.
- c) Trước hết, ta có $SE \cdot SO = SD \cdot SA (= SB^2)$ suy ra tứ giác $AOED$ nội tiếp. Nên $\angle DAE = \angle DOE = \angle DOJ = 2\angle DAJ$. Dẫn đến AJ là phân giác của góc $\angle EAS$, hay $\angle BAD = \angle EAC$.

Từ đây, cùng với $\angle ADB = \angle ACE (= \angle ACB)$, ta suy ra các tam giác ABD và ACE đồng dạng với nhau. Dẫn đến $AE \cdot AD = AB \cdot AC$. (1)

Gọi N là giao điểm thứ hai của AI với đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC . Dễ thấy hai tam giác AIB và ACN đồng dạng với nhau, nên $AI \cdot AN = AB \cdot AC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AE \cdot AD = AI \cdot AN$. Cùng với $\angle DAI = \angle NAE$, ta suy ra các tam giác AID và AEN đồng dạng với nhau. Suy ra $\angle ENA = \angle IDA = \angle MDA = \angle MJA$. Hay EN song song với JM . Mà rõ ràng J là trung điểm của IN , nên MJ cũng đi

qua trung điểm của IE .

2) Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Đường thẳng qua A và song song với CD cắt đường thẳng qua D và song song với AB tại S . Khi đó SO song song (hoặc trùng) với MN .

Chứng minh. Gọi B' đối xứng với B qua M . Khi đó MN song song với $B'C$. Ta chứng minh SO cũng song song với $B'C$.

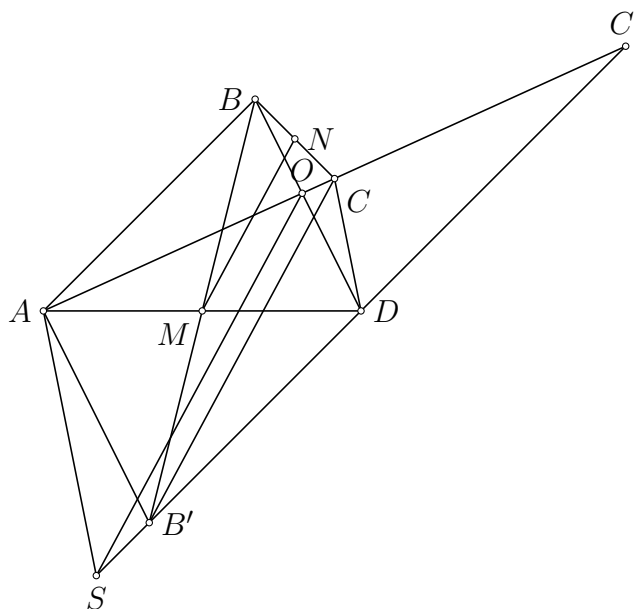
Thật vậy, gọi C' là giao của AC và SD . Để ý rằng tứ giác $ABDB'$ là

hình bình hành, nên

$$\frac{C'B'}{C'S} = \frac{C'B'}{C'A} \cdot \frac{C'A}{C'S} = \frac{C'D}{C'O} \cdot \frac{C'C}{C'D} = \frac{C'C}{C'O}.$$

Ta có điều cần chứng minh.

Trở lại bài toán.



Áp dụng bổ đề trên với các tứ giác $ABCD$ và $AEFD$, ta suy ra S, O, P thẳng hàng, suy ra OP song song với MN . Tương tự, ta cũng có OQ song song với MN . Do đó, O, P, Q thẳng hàng và $PQ \parallel MN$.

Gọi I là giao điểm của FE và MN , P', Q' là giao điểm của PQ với AD, BC . Qua F , kẻ đường thẳng song song với PQ , cắt đoạn AD tại G và cắt tia đối của tia CB tại H . Các điểm J, K được định nghĩa tương tự (xem hình vẽ).

Theo trên, IM là đường trung bình của hình thang $EFGK$ nên M là trung điểm của KG . Suy ra $GA = KD$.

Áp dụng định lý Thales và BDT Cauchy-Schwartz, ta thu được

$$\frac{FA}{FP} + \frac{ED}{EP} = \frac{GA}{GP'} + \frac{KD}{KP'} = DK \left(\frac{1}{GP'} + \frac{1}{KP'} \right) \geq DK \cdot \frac{4}{GP' + KP'} = 4 \frac{DK}{GK}.$$

Tương tự, ta cũng thu được $\frac{FB}{FQ} + \frac{EC}{EQ} \geq 4 \frac{CJ}{HJ}$. Suy ra $T \geq 4 \left(\frac{DK}{GK} + \frac{CJ}{HJ} \right)$.

Cuối cùng, ta chứng minh $\frac{DK}{GK} + \frac{CJ}{HJ} = 2$, và do đó, GTNN của T bằng 8.

Thật vậy, gọi C' là điểm trên AD sao cho CC' song song với HG . Khi đó, do F là trung điểm CD nên G là trung điểm $C'D$. Do đó $\frac{DK}{GK} + \frac{CJ}{HJ} = \frac{DK}{GK} + \frac{C'K}{GK} = \frac{KD + KC'}{KG} = 2$.

□

Câu 5. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + 3ab + b^2}{\sqrt{6a^2 + 8ab + 11b^2}} + \frac{b^2 + 3bc + c^2}{\sqrt{6b^2 + 8bc + 11c^2}} + \frac{c^2 + 3ca + a^2}{\sqrt{6c^2 + 8ca + 11a^2}} \leq 3$

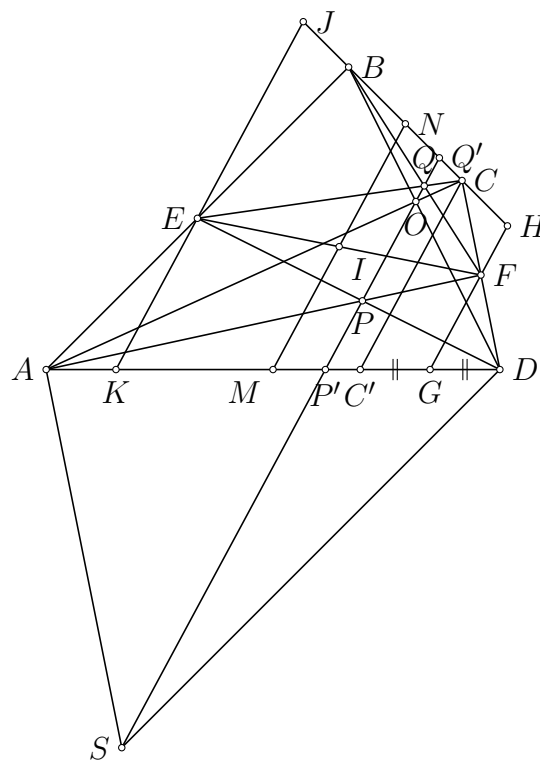
Lời giải.

Ta có: $6a^2 + 8ab + 11b^2 = (2a + 3b)^2 + 2(a - b)^2 \geq (2a + 3b)^2$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + 3ab + b^2}{\sqrt{6a^2 + 8ab + 11b^2}} \leq \frac{a^2 + 3ab + b^2}{2a + 3b}.$$

Tiếp tục ta chứng minh $\frac{a^2 + 3ab + b^2}{2a + 3b} \leq \frac{3a + 2b}{5} \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

Tương tự ta có:



$$\frac{b^2 + 3bc + c^2}{\sqrt{6b^2 + 8bc + 11c^2}} \leq \frac{3b + 2c}{5}.$$

$$\frac{c^2 + 3ca + a^2}{\sqrt{6c^2 + 8ca + 11a^2}} \leq \frac{3c + 2a}{5}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta được:

$$M = \frac{a^2 + 3ab + b^2}{\sqrt{6a^2 + 8ab + 11b^2}} + \frac{b^2 + 3bc + c^2}{\sqrt{6b^2 + 8bc + 11c^2}} + \frac{c^2 + 3ca + a^2}{\sqrt{6c^2 + 8ca + 11a^2}} \leq a + b + c.$$

Mặt khác: $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 9 \Rightarrow a + b + c \leq 3.$

Vậy $M \leq 3$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

—————HẾT—————

TOÁN THCS VIỆT NAM
ĐỀ THI HSG TOÁN 9
ĐỀ SỐ 35

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
TOÁN 9 NĂM HỌC 2017-2018,
HUYỆN TIỀN HẢI - TỈNH THÁI

Họ và tên thí sinh: **BÌNH** Lớp:

Câu 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

b) $B = \sqrt{\frac{(a+bc)(b+ca)}{c+ab}} + \sqrt{\frac{(c+ab)(b+ca)}{a+bc}} + \sqrt{\frac{(c+ab)(a+bc)}{b+ca}}$, (với a, b, c là các số thực dương và $a + b + c = 1$).

Lời giải.

a) Ta có $A = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} > 0$ nên

$$\begin{aligned} A^2 &= 4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 2\sqrt{16 - (10 + 2\sqrt{5})} \\ &= 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} \\ &= 8 + 2(\sqrt{5} - 1) = 6 + 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 1)^2. \end{aligned}$$

Suy ra $A = \sqrt{5} + 1$ (do $A > 0$).

b) Vì $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$ nên biểu thức B có nghĩa và $0 < a, b, c < 1$. Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{\frac{(1-b-c+bc)(1-a-c+ca)}{1-a-b+ab}} + \sqrt{\frac{(1-a-b+ab)(1-a-c+ca)}{1-b-c+bc}} \\ &\quad + \sqrt{\frac{(1-a-b+ab)(1-b-c+bc)}{1-a-c+ca}} \\ &= \sqrt{\frac{(1-b)(1-c)(1-a)(1-c)}{(1-a)(1-b)}} + \sqrt{\frac{(1-a)(1-b)(1-a)(1-c)}{(1-b)(1-c)}} \\ &\quad + \sqrt{\frac{(1-a)(1-b)(1-b)(1-c)}{(1-a)(1-c)}} \\ &= \sqrt{(1-c)^2} + \sqrt{(1-a)^2} + \sqrt{(1-b)^2} \\ &= |1-c| + |1-a| + |1-b| \\ &= (1-c) + (1-a) + (1-b) \quad (\text{do } 0 < a, b, c < 1). \\ &= 2 \quad (\text{do } a + b + c = 1). \end{aligned}$$

**Câu 2.**

- a) Tìm các số a, b sao cho đa thức $f(x) = x^4 + ax^3 + bx - 1$ chia hết cho đa thức $x^3 - 3x + 2$.
- b) Chứng minh rằng $B = 4x(x+y)(x+y+z)(x+z) + y^2z^2$ là một số chính phương với x, y, z là các số nguyên.

Lời giải.

- a) Ta có $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Theo bài ra ta có $f(x) : (x-1)(x-2)$.

$$\Rightarrow f(x) : (x-1) \text{ và } f(x) : (x-2).$$

$$\text{Do } f(x) : (x-1) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a \quad (1)$$

$$\text{Do } f(x) : (x-2) \Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow 8a + 2b = -15 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 8a + 2(-a) = -15 \Rightarrow a = -\frac{5}{2} \Rightarrow b = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Thử lại: } \left(x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{5}{2}x - 1\right) : (x^2 - 3x + 2) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } a = -\frac{5}{2}, b = \frac{5}{2}.$$

- b) Ta có

$$\begin{aligned} B &= 4x(x+y)(x+y+z)(x+z) + y^2z^2 \\ &= 4(x^2 + xy + xz)(x^2 + xy + xz + yz) + y^2z^2 \\ &= 4(x^2 + xy + xz)^2 + 4(x^2 + xy + xz)yz + y^2z^2 \\ &= (2x^2 + 2xy + 2xz + yz)^2. \end{aligned}$$

Vì x, y, z là các số nguyên nên $2x^2 + 2xy + 2xz + yz$ là số nguyên. Do đó B là số chính phương.

**Câu 3.**

- a) Tìm m để phương trình $\frac{2m-1}{x-2} = m-3$ vô nghiệm.
- b) Giải phương trình $4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 14$.
- c) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3$.

Lời giải.

- a) ĐKXD $x \neq 2$.

$$\frac{2m-1}{x-2} = m-3 \Rightarrow 2m-1 = (x-2)(m-3) \Rightarrow (m-3)x = 4m-7 \quad (3).$$

+) Xét $m = 3$, phương trình (3) trở thành $0x = 5$ (vô lý).

Do đó, với $m = 3$ phương trình đã cho vô nghiệm.

+) Xét $m \neq 3$, phương trình (3) có nghiệm $x = \frac{4m-7}{m-3}$.

Do đó, để phương trình đã cho vô nghiệm thì $\frac{4m-7}{m-3} = 2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$.

Vậy với $m = 3, m = \frac{1}{2}$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

b) ĐKXD: $x \geq -1$. Ta có

$$\begin{aligned} 4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 14 &\Leftrightarrow x^2 - 5x - 4\sqrt{x+1} + 14 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + x + 1 - 4\sqrt{x+1} + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 + (\sqrt{x+1} - 2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ \sqrt{x+1}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \quad (\text{thoả mãn}). \end{aligned}$$

c) Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho các số dương ta có

$$3 = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 3\sqrt{\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y}} = 3\sqrt{xyz} \Rightarrow xyz \leq 1 \quad (4).$$

Do x, y, z là các số nguyên dương nên từ (4) suy ra $x = y = z = 1$.

Thử lại: Với $x = y = z = 1$ ta có $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3$.

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Kẻ AH vuông góc với BC tại H . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC .

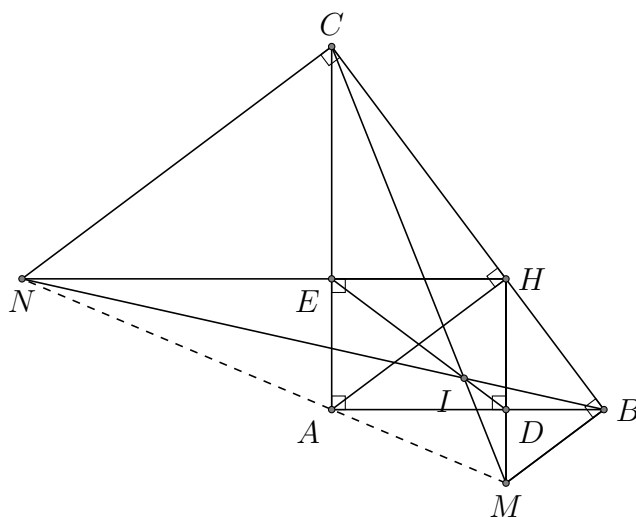
a) Biết $AB = 6\text{cm}$, $HC = 6,4\text{cm}$. Tính BC, AC .

b) Chứng minh rằng $DE^3 = BC \cdot BD \cdot CE$

c) Đường thẳng kẻ qua B vuông góc với BC cắt HD tại M , đường thẳng kẻ qua C vuông góc với BC cắt HE tại N . Chứng minh rằng M, A, N thẳng hàng.

d) Chứng minh rằng BN, CM, DE đồng qui.

Lời giải.



- a) Đặt $BH = x$ (đơn vị: cm) ($0 < x < 6$). Ta có $BC = x + 6,4$.

$$\text{Ta có } AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow 6^2 = x(x + 6,4) \Rightarrow x = 3,6$$

$$\Rightarrow BC = 10 \text{ cm} \Rightarrow AC = 8 \text{ cm.}$$

Tứ giác $ADHE$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$

- b) $ADHE$ là hình chữ nhật $\Rightarrow DE = AH$.

Tam giác AHB vuông tại H , đường cao $HD \Rightarrow BH^2 = BD \cdot BA$

Tam giác AHC vuông tại H , đường cao $HE \Rightarrow CH^2 = CE \cdot CA$

$$\text{Ta có } AH^2 = HB \cdot HC \Rightarrow AH^4 = HB^2 \cdot HC^2$$

$$\Rightarrow AH^4 = BD \cdot BA \cdot CE \cdot CA = BD \cdot CE \cdot BC \cdot AH$$

$$\Rightarrow AH^3 = BD \cdot CE \cdot BC. \text{ Vậy } DE^3 = BD \cdot CE \cdot BC.$$

- c) Ta có $\widehat{CNH} = \widehat{BHM}$ (cùng phụ với $\widehat{CHN}$)

Do $ADHE$ là hình chữ nhật $\Rightarrow HD = AE$.

Gọi M' là giao điểm của NA và HD . Ta có

$$\cos^2 \widehat{CNH} = \frac{NE}{NC} \cdot \frac{NC}{NH} = \frac{NE}{NH} = \frac{AE}{M'H}$$

$$\cos^2 \widehat{BHM} = \frac{HD}{HB} \cdot \frac{HB}{HM} = \frac{HD}{HM} = \frac{AE}{HM}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{M'H} = \frac{AE}{HM} \Rightarrow M'H = MH$$

$$\Rightarrow M' \equiv M \Rightarrow M, A, N \text{ thẳng hàng.}$$

- d) Ta có $BM \parallel CN$, $BD \parallel NE$, $MD \parallel CE$

$$\Rightarrow \triangle BDM \sim \triangle NEC \Rightarrow \frac{BD}{NE} = \frac{DM}{EC} \quad (5).$$

$$\text{Gọi } I \text{ là giao điểm của } MC \text{ và } DE \Rightarrow \frac{DI}{EI} = \frac{DM}{EC} \quad (6).$$

$$\text{Gọi } I' \text{ là giao điểm của } BN \text{ và } DE \Rightarrow \frac{DI'}{EI'} = \frac{BD}{NE} \quad (7)$$

$$\text{Từ (5), (6), (7)} \Rightarrow \frac{DI}{EI} = \frac{DI'}{EI'} \Rightarrow I \equiv I'.$$

Vậy BN, CM, DE đồng quy.

□

Câu 5. Cho đa thức $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (với a, b, c, d là các số thực). Biết $f(1) = 10; f(2) = 20; f(3) = 30$. Tính giá trị biểu thức $A = f(8) + f(-4)$.

Lời giải.

Xét đa thức $g(x) = f(x) - 10x \Rightarrow$ bậc của đa thức $g(x)$ bằng 4.

Từ giả thiết $\Rightarrow g(1) = g(2) = g(3) = 0$.

Mà $g(x)$ có bậc bằng 4 nên $g(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-a)$ (với a là số thực nào đó)

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-a) + 10x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(8) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot (8-a) + 80 \\ f(-4) = (-5)(-6)(-7)(-4-a) - 40 = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot (4+a) - 40 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(8) + f(-4) = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot (8-a+4+a) + 40 = 2560.$$

□

————— HẾT —————