

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài I (2 điểm)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-1}$ với $x \geq 0$; $x \neq 1$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 49$

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

3) Cho $P = A : B$. Tìm giá trị của x để $P(\sqrt{x}+1) = x+4+\sqrt{x-4}$

Bài II (2 điểm)

1) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là 124m. Nếu tăng chiều dài thêm 5m và chiều rộng thêm 3m thì diện tích mảnh vườn tăng thêm 255m². Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn ban đầu?

2) Tính diện tích mặt bàn hình tròn có đường kính 1,2 m. (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Bài III (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2(x+2) - \sqrt{y-1} = 6 \\ 5(x+2) - 2\sqrt{y-1} = 16 \end{cases}$$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + 3$ (m là tham số).

a, Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m = 2$

b, Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ

x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2}$

Bài IV (3 điểm)

Cho nửa đường tròn (O;R), đường kính AB. Trên tia tiếp tuyến kẻ từ A của nửa đường tròn này lấy điểm C sao cho $AC > R$. Từ C kẻ tiếp tuyến thứ hai CD của nửa đường tròn (O;R), với D là tiếp điểm. Gọi H là giao điểm của AD và OC.

1) Chứng minh: ACDO là tứ giác nội tiếp.

2) Đường thẳng BC cắt đường tròn (O;R) tại điểm thứ hai là M. Chứng minh: $CD^2 = CM \cdot CB$

3) Gọi K là giao điểm của AD và BC. Chứng minh: $\widehat{MHC} = \widehat{CBO}$ và $\frac{CM}{CB} = \frac{KM}{KB}$

Bài V (0,5 điểm)

Cho hai số dương a, b thỏa mãn $a + b \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{2}{ab} + 4ab$$

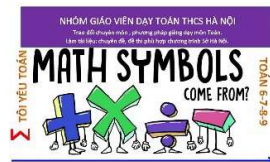
..... Hết

Họ và tên thí sinh.....

Số báo danh.....

Bài I: (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; $B = \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

1. Tính giá trị biểu thức A khi $x = 49$;
2. Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$;
3. Cho $P = A : B$. Tìm giá trị của x để $P(\sqrt{x}+1) = x + 4 + \sqrt{x-4}$.



Bài II: (2,0 điểm)

1) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là 124m. Nếu tăng chiều dài thêm 5m và chiều rộng thêm 3m thì diện tích mảnh vườn tăng thêm $255m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn ban đầu?

2) Tính diện tích mặt bàn hình tròn có đường kính 1,2m. (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Bài III: (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2(x+2) - \sqrt{y-1} = 6 \\ 5(x+2) - 2\sqrt{y-1} = 16 \end{cases}$$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 3$ (m là tham số)

a) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m = 2$.

b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2}.$$

Bài IV: (3,0 điểm)

Cho nửa đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Trên tia tiếp tuyến kẻ từ A của nửa đường tròn này lấy điểm C sao cho $AC > R$. Từ C kẻ tiếp tuyến thứ hai CD của nửa đường tròn $(O; R)$, với D là tiếp điểm. Gọi H là giao điểm của AD và OC .

1) Chứng minh: $ACDO$ là tứ giác nội tiếp.

2) Đường thẳng BC cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm thứ hai là M . Chứng minh: $CD^2 = CM \cdot CB$.

3) Gọi K là giao điểm của AD và BC . Chứng minh: $\widehat{MHC} = \widehat{CBO}$ và $\frac{CM}{CB} = \frac{KM}{KB}$.

Bài V: (0,5 điểm)

Cho $a, b > 0$ thỏa mãn: $a + b \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$M = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{2}{ab} + 4ab.$$

---HẾT---

HƯỚNG DẪN

Bài I: (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; $B = \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

1. Tính giá trị biểu thức A khi $x = 49$;
2. Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$;
3. Cho $P = A : B$. Tìm giá trị của x để $P(\sqrt{x}+1) = x + 4 + \sqrt{x-4}$.

Hướng dẫn

1. Với $x = 49 \Rightarrow A = \frac{4\sqrt{49}}{\sqrt{49}-1} = \frac{4 \cdot 7}{6} = 14$.

$$\text{Xét } B = \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1 + \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) + 2}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1 + x + \sqrt{x} + 2}{x-1}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\sqrt{x}-1 + x + \sqrt{x} + 2}{x-1} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

3. Ta có $P = A : B = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

Khi đó $P(\sqrt{x}+1) = x + 4 + \sqrt{x-4}$

Điều kiện: $x \geq 4$

Nên $\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}(\sqrt{x}+1) = x + 4 + \sqrt{x-4} \Rightarrow 4\sqrt{x} = x + 4 + \sqrt{x-4}$

$$\Rightarrow 4\sqrt{x} = x + 4 + \sqrt{x-4} \Leftrightarrow x + 4 + \sqrt{x-4} - 4\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)^2 + \sqrt{x-4} = 0$$

Do $\begin{cases} (\sqrt{x}-2)^2 \geq 0 \\ \sqrt{x-4} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 4\sqrt{x} = x + 4 + \sqrt{x-4} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)^2 + \sqrt{x-4} \geq 0$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-2=0 \\ \sqrt{x-4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=2 \\ x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4(tm)$

Vậy $x=4$ thì $P(\sqrt{x}+1) = x + 4 + \sqrt{x-4}$.

Bài II: (2,0 điểm)

1) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là 124m. Nếu tăng chiều dài thêm 5m và chiều rộng thêm 3m thì diện tích mảnh vườn tăng thêm $255m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn ban đầu?

2) Tính diện tích mặt bàn hình tròn có đường kính 1,2m. (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Hướng dẫn

1) Gọi chiều dài ban đầu của mảnh vườn là x (m), chiều rộng ban đầu là y (m). ($x > y > 0$)

Vì chu vi ban đầu của mảnh vườn là 124m nên ta có phương trình: $2(x + y) = 124$

$$\Leftrightarrow x + y = 62 \quad (1)$$

Sau khi thay đổi kích thước thì chiều dài mảnh vườn là: $(x + 5)$ (m) và chiều rộng là: $(y + 3)$ (m).

Diện tích mảnh vườn tăng thêm $255m^2$ nên ta có phương trình: $(x + 5)(y + 3) = xy + 255$.

$$\Leftrightarrow 3x + 5y = 240 \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có hệ: $\begin{cases} x + y = 62 \\ 3x + 5y = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 186 \\ 3x + 5y = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 27 \\ x = 35 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy chiều dài ban đầu của mảnh vườn là 35m, chiều rộng là 27m.

2) Bán kính mặt bàn là : $R = \frac{1,2}{2} = 0,6(m)$

Diện tích mặt bàn là : $S = \pi R^2 \approx 3,14.(0,6)^2 \approx 1,13(m^2)$.

Bài III: (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2(x+2) - \sqrt{y-1} = 6 \\ 5(x+2) - 2\sqrt{y-1} = 16 \end{cases}$$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 3$ (m là tham số)

a) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m = 2$.

b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2}.$$

Hướng dẫn

1)
$$\begin{cases} 2(x+2) - \sqrt{y-1} = 6 \\ 5(x+2) - 2\sqrt{y-1} = 16 \end{cases} \quad (\text{ĐKXĐ: } y \geq 1)$$

Đặt
$$\begin{cases} x+2 = a \\ \sqrt{y-1} = b \quad (b \geq 0) \end{cases}$$
 khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2a - b = 6 \\ 5a - 2b = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b = 12 \\ 5a - 2b = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ 2a - b = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ 2.4 - b = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \quad (\text{tmđk } b \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 4 \\ \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y-1 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \quad (\text{tmĐKXĐ})$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $(2; 5)$

2)

a) Thay $m = 2$ vào phương trình đường thẳng (d) ta có

$$y = 2x + 3$$

Phương trình hoành độ giao điểm hai đồ thị hàm số (P) và (d) là

$$x^2 = 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-2)^2 - 4.1.(-3) = 16$$

$$\Rightarrow \Delta > 0$$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{16}}{2.1} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{16}}{2.1} = -1$$

Thay $x_1 = 3$ vào phương trình (P) ta có $y_1 = 9$

Thay $x_2 = -1$ vào phương trình (P) ta có $y_2 = 1$

Vậy tọa độ giao điểm hai đồ thị hàm số (P) và (d) là (3; 9) và (-1; 1)

b) Phương trình hoành độ giao điểm hai đồ thị hàm số (P) và (d) là

$$x^2 = mx + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx - 3 = 0 \quad (*)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= m^2 - 4.1.(-3) = m^2 + 12$$

$$\text{Có } m^2 + 12 \geq 12 > 0$$

$$\Rightarrow \Delta > 0$$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi m

$\Rightarrow$ (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m

Áp dụng hệ thức Vi et ta có

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = m$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -3$$

Vì $x_1 \cdot x_2 = -3 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \neq 0$ nên $x_1 \neq 0$ và $x_2 \neq 0$

$$\text{Ta có } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) = 3x_1 \cdot x_2$$

$$\Rightarrow 2m = 3(-3)$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-9}{2}$$

Vậy (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow m = \frac{-9}{2}$

Bài IV: (3,0 điểm)

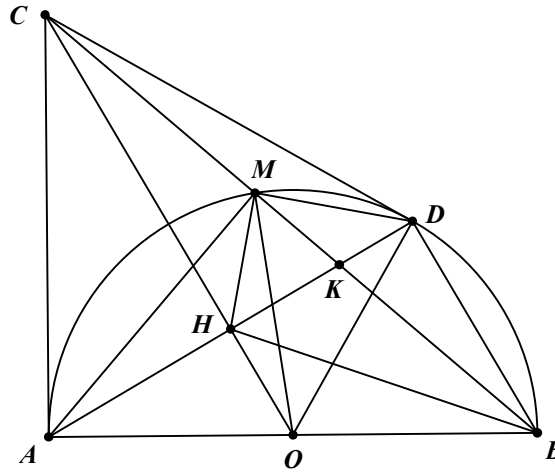
Cho nửa đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Trên tia tiếp tuyến kẻ từ A của nửa đường tròn này lấy điểm C sao cho $AC > R$. Từ C kẻ tiếp tuyến thứ hai CD của nửa đường tròn $(O; R)$, với D là tiếp điểm. Gọi H là giao điểm của AD và OC .

1) Chứng minh: $ACDO$ là tứ giác nội tiếp.

2) Đường thẳng BC cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm thứ hai là M . Chứng minh: $CD^2 = CM \cdot CB$.

3) Gọi K là giao điểm của AD và BC . Chứng minh: $\widehat{MHC} = \widehat{CBO}$ và $\frac{CM}{CB} = \frac{KM}{KB}$.

Hướng dẫn



1) Chứng minh: $ACDO$ là tứ giác nội tiếp.

Tứ giác $ACDO$ có $\widehat{CAO} = \widehat{CDO} = 90^\circ$ (tính chất của tiếp tuyến) nên tứ giác $ACDO$ nội tiếp đường tròn đường kính AO .

2) Đường thẳng BC cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm thứ hai là M . Chứng minh:

$$CD^2 = CM \cdot CB.$$

Xét $\triangle CDM$ và $\triangle CBD$ có:

$\widehat{MCD}$ chung;

$\widehat{CDM} = \widehat{CBD}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\widehat{MD}$)

$$\Rightarrow \triangle CDM \sim \triangle CBD \Rightarrow \frac{CD}{CM} = \frac{CB}{CD} \Leftrightarrow CD^2 = CM \cdot CB.$$

3) Gọi K là giao điểm của AD và BC . Chứng minh: $\widehat{MHC} = \widehat{CBO}$ và $\frac{CM}{CB} = \frac{KM}{KB}$.

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có $CA = CD$ mà $OA = OD (= R)$ nên OC là trung trực của $AD \Rightarrow OC \perp AD$ tại trung điểm H của AD .

Lại có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{AMC} = 90^\circ$ (kề bù với $\widehat{AMB}$).

Tứ giác $ACMH$ có $\widehat{AMC} = \widehat{AHC} = 90^\circ$ nên nội tiếp đường tròn đường kính $AC \Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{MC}$), mà $\widehat{MAC} = \widehat{MBA}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\widehat{AM}$) $\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MBA} (= \widehat{MAC})$ hay $\widehat{MHC} = \widehat{CBO}$.

Vì $\widehat{MHC} = \widehat{CBO}$ nên tứ giác $OHMB$ nội tiếp (có góc ngoài đỉnh H bằng góc trong đỉnh B)

$\Rightarrow \widehat{OHB} = \widehat{OMB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{OB}$) và $\widehat{OMB} = \widehat{MBO}$ ($\triangle OMB$ cân tại O).

Vậy $\widehat{MHC} = \widehat{MBO} = \widehat{OMB} = \widehat{OHB} \Rightarrow 90^\circ - \widehat{MHC} = 90^\circ - \widehat{OHB} \Rightarrow \widehat{MHK} = \widehat{BHK} \Rightarrow HK$ là tia phân giác trong tại đỉnh H của $\triangle MHB$.

Lại có $HC \perp HK \Rightarrow HC$ là phân giác ngoài tại đỉnh H của $\triangle MHB$.

Theo tính chất đường phân giác, ta có: $\frac{CM}{CB} = \frac{HM}{HB} = \frac{KM}{KB}$.

$$\text{Vậy } \frac{CM}{CB} = \frac{KM}{KB}.$$

Bài V: (0,5 điểm)

Cho $a, b > 0$ thỏa mãn : $a + b \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$M = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{2}{ab} + 4ab.$$

Hướng dẫn

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, $x, y > 0$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y$. (*Chứng minh bằng phương pháp biến đổi tương đương*)

Ta có : $M = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{2}{ab} + 4ab$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} + \frac{3}{2ab} + 4ab$$

$$= \left(\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} \right) + \left(4ab + \frac{1}{4ab} \right) + \frac{5}{4ab}$$

$$\bullet \quad \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} \geq 4$$

$$\bullet \quad 4ab + \frac{1}{4ab} \geq 2\sqrt{4ab \cdot \frac{1}{4ab}} = 2$$

$$\bullet \quad 2\sqrt{ab} \leq a + b \leq 1 \Leftrightarrow ab \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{ab} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{5}{4ab} \geq 5$$

Suy ra: $M \geq 4 + 2 + 5 = 11$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Vậy GTNN của $M = 11$ khi $a = b = \frac{1}{2}$.

---HẾT---