

**Bài 1 (4,0 điểm)**

1) Tính giá trị biểu thức  $A = \frac{63^2 - 47^2}{215^2 - 105^2}$

2) Tính giá trị của biểu thức  $B = x^6 - 50x^5 + 50x^4 - 50x^3 + 50x^2 - 50x + 50$  tại  $x = 49$

**Bài 2 (4,0 điểm)**

1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử  $x^3 - 2x^2 + x - xy^2$

2) Tìm số tự nhiên  $n$  để  $n^2 + 2n + 20$  là số chính phương.

**Bài 3 (5,0 điểm)**

1) Cho các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = 1$$

2) Cho  $a, b, c$  là các số nguyên thỏa mãn  $a + b + 2024c = c^3$ . Chứng minh rằng:  $a^3 + b^3 + c^3$  chia hết cho 6

3) Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x, y)$  thỏa mãn  $x^2 - xy - 2022x + 2023y - 2024 = 0$

**Bài 4 (6,0 điểm)**

1) Cho hình vuông ABCD trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho  $AM = BN = CP = DQ$ .

a) Chứng minh MNPQ hình vuông.

b) Tìm vị trí của M, N, P, Q để diện tích tứ giác MNPQ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Cho tam giác ABC ( $AB < AC$ ), M là trung điểm của BC. Một đường thẳng qua M và song song với phân giác của góc BAC cắt AC, AB lần lượt tại E, F. Chứng minh  $CE = BF$

**Bài 5 (1,0 điểm):**

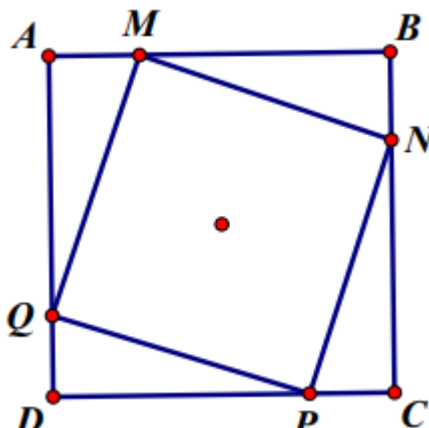
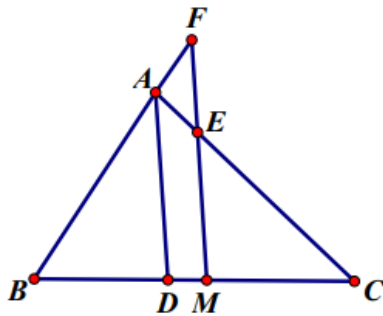
Cho các số nguyên dương  $a$  và  $b$  thỏa mãn  $S = a^2 + b^2 + ab + 3(a+b) + 2023$  chia hết cho 5. Tìm số dư khi chia  $a - b$  cho 5

Họ và tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....Phòng.....

# ĐÁP ÁN BIỂU ĐIỂM CHẤM TOÁN 8

| Bài                      | Nội dung                                                                                                                       | Điểm |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>Bài 1<br/>(4,0 đ)</b> | 1) $A = \frac{63^2 - 47^2}{215^2 - 105^2} = \frac{(63-47)(63+47)}{(215-105)(215+105)}$                                         | 1,0  |
|                          | $= \frac{16.110}{110.320} = \frac{1}{20}$                                                                                      | 1,0  |
|                          | 2) Ta có $x = 49$ nên $x + 1 = 50$ thay vào biểu thức B, ta được                                                               | 0,5  |
|                          | $B = x^6 - (x+1)x^5 + (x+1)x^4 - (x+1)x^3 + (x+1)x^2 - (x+1)x + (x+1)$                                                         | 0,5  |
|                          | $= x^6 - x^6 - x^5 + x^5 + x^4 - x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1$                                                      | 0,5  |
|                          | $= 1$                                                                                                                          | 0,5  |
| <b>Bài 2<br/>(4,0 đ)</b> | 1) $x^3 - 2x^2 + x - xy^2 = x(x^2 - 2x + 1 - y^2)$                                                                             | 0,5  |
|                          | $= x[(x^2 - 2x + 1) - y^2]$                                                                                                    | 0,5  |
|                          | $= x[(x-1)^2 - y^2]$                                                                                                           | 0,5  |
|                          | $= x(x-1-y)(x-1+y)$                                                                                                            | 0,5  |
|                          | $= x(x-y-1)(x+y-1)$                                                                                                            | 0,5  |
|                          | 2) Đặt $p^2 = n^2 + 2n + 20$                                                                                                   | 0,25 |
|                          | $p^2 = (n+1)^2 + 19$                                                                                                           | 0,25 |
|                          | $p^2 - (n+1)^2 = 19$                                                                                                           | 0,25 |
|                          | $(p-n-1)(p+n+1) = 19$                                                                                                          | 0,25 |
|                          | Do p, n là các số tự nhiên nên $(p-n-1) < (p+n+1)$                                                                             | 0,25 |
|                          | Khi đó $\begin{cases} p-n-1=1 \\ p+n+1=19 \end{cases}$                                                                         | 0,25 |
|                          | Suy ra $n = 8$ (TM)                                                                                                            | 0,25 |
|                          |                                                                                                                                | 0,5  |
|                          | 1) $\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = \frac{abc}{abbc+abc+bc} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{cb}{cab+cb+b}$ | 0,5  |
|                          | $= \frac{1}{bc+b+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{bc}{bc+b+1}$                                                                    | 0,5  |
|                          | $= \frac{1+b+bc}{bc+b+1} = 1$ (đpcm)                                                                                           | 0,5  |
|                          | 2) Ta có $a+b+2024c = c^3$                                                                                                     |      |
|                          | $a+b+c = c^3 - c - 2022c$                                                                                                      |      |
|                          | $a+b+c = c(c-1)(c+1) - 2022c$                                                                                                  | 0,5  |
| <b>Bài 3<br/>(5,0 đ)</b> | Ta có $c(c-1)(c+1) : 6$ ; $2022c : 6$ nên $(a+b+c) : 6$                                                                        |      |
|                          | Xét $(a^3 + b^3 + c^3) - (a+b+c) = (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c)$                                                          |      |
|                          | $= a(a-1)(a+1) + b(b-1)(b+1) + c(c-1)(c+1)$                                                                                    | 0,5  |
|                          | Ta có $a(a-1)(a+1) : 6$ ; $b(b-1)(b+1) : 6$ ; $c(c-1)(c+1) : 6$                                                                |      |
|                          | Nên $(a^3 + b^3 + c^3) - (a+b+c)$ chia hết cho 6                                                                               | 0,25 |

|                                |                                                                                                                                                                                                                                              |      |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|                                | Mà $(a+b+c):6$ (cm trên)<br>Vậy $(a^3+b^3+c^3):6$ (đpcm)                                                                                                                                                                                     | 0,25 |
|                                | 3) $x^2 - xy - 2022x + 2023y - 2024 = 0$<br>$x^2 - xy + x - 2023x + 2023y - 2023 - 1 = 0$<br>$(x^2 - xy + x) - (2023x - 2023y + 2023) = 1$<br>$x(x - y + 1) - 2023(x - y + 1) = 1$<br>$(x - y + 1)(x - 2023) = 1$                            | 0,5  |
|                                | Trường hợp 1: $\begin{cases} x - y + 1 = 1 \\ x - 2023 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2024 \\ y = 2024 \end{cases}$                                                                                                       | 0,5  |
|                                | Trường hợp 2: $\begin{cases} x - y + 1 = -1 \\ x - 2023 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2022 \\ y = -2020 \end{cases}$                                                                                                   | 0,5  |
|                                | Vậy cặp số $(x, y)$ là $(2024, 2024); (-2022, -2020)$                                                                                                                                                                                        | 0,5  |
| <b>Bài 4</b><br><b>(6,0 đ)</b> | 1)<br>                                                                                                                                                    | 0,5  |
|                                | a) Chứng minh được MNPQ là hình vuông                                                                                                                                                                                                        | 2,0  |
|                                | b) $S_{MNPQ}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $S_{AMQ}$ lớn nhất, mà $S_{AMQ} = \frac{AM \cdot AQ}{2}$                                                                                                                                               | 0,5  |
|                                | Ta có $AM \cdot AQ = AM \cdot MB \leq \frac{(AM + MB)^2}{4} = \frac{AB^2}{4}$<br>$S_{AMQ}$ lớn nhất là $\frac{AB^2}{8}$ , đạt được khi $AM = MB$<br>Vậy $S_{MNPQ}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. | 0,5  |
|                                | 2)<br>                                                                                                                                                    | 0,5  |

|                          |                                                                                                                                                                                                                    |      |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|                          | Gọi AD là phân giác của góc BAC                                                                                                                                                                                    |      |
|                          | Ta có: AD // FM nên $\frac{BA}{BF} = \frac{BD}{BM} \Rightarrow \frac{BF}{BM} = \frac{BA}{BD}$ (1)                                                                                                                  | 0,25 |
|                          | ME // AD nên $\frac{CE}{CA} = \frac{CM}{CD} \Rightarrow \frac{CE}{CM} = \frac{CA}{CD}$ (2)                                                                                                                         | 0,25 |
|                          | Do AD là phân giác nên ta có: $\frac{BA}{CA} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{BA}{BD} = \frac{CA}{CD}$ (3)                                                                                                        | 0,5  |
|                          | Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{BF}{BM} = \frac{CE}{CM}$ , mà BM = CM nên BF = CE (đpcm)                                                                                                                            | 0,5  |
| <b>Bài 5<br/>(1,0 đ)</b> | Ta có $S = a^2 + b^2 + ab + 3(a+b) + 2023$ chia hết cho 5 nên ta được:                                                                                                                                             |      |
|                          | $4a^2 + 4b^2 + 4ab + 12(a+b) + 4.3 + 4.2020$ chia hết cho 5                                                                                                                                                        |      |
|                          | $4a^2 + 4b^2 + 4ab + 12(a+b) + 12$ chia hết cho 5                                                                                                                                                                  | 0,25 |
|                          | $(2a+b+3)^2 + 3(b+1)^2$ chia hết cho 5                                                                                                                                                                             |      |
|                          | Đặt $x = 2a + b + 3$ , $y = b + 1$ thì ta được $x^2 + 3y^2 : 5$                                                                                                                                                    |      |
|                          | + Nếu $y^2$ chia hết cho 5, khi đó $x^2$ cũng phải chia hết cho 5. Từ đó ta có:                                                                                                                                    | 0,25 |
|                          | $\begin{cases} (2a+b+3)^2 : 5 \\ (b+1)^2 : 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2a+b+3) : 5 \\ (b+1) : 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2a+b+3) : 5 \\ 3(b+1) : 5 \end{cases} \Rightarrow (2a-2b) : 5$ |      |
|                          | Suy ra $2(a-b) : 5$ . Vậy số dư khi chia $a-b$ cho 5 là 0                                                                                                                                                          |      |
|                          | + Nếu $y^2$ chia 5 dư 1, thì $x^2$ chia 5 phải dư 2. Vô lí                                                                                                                                                         | 0,25 |
|                          | + Nếu $y^2$ chia 5 dư 4, thì $x^2$ chia 5 phải dư 3. Vô lí                                                                                                                                                         | 0,25 |
|                          | Kết luận: Vậy số dư khi chia $a-b$ cho 5 là 0                                                                                                                                                                      | 0,25 |

**Lưu ý :** Nếu học sinh làm theo cách khác mà đúng thì cho điểm tối đa