

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (2,0 điểm)

1. Cho hai số a, b thỏa mãn các điều kiện $ab = 1, a + b \neq 0$. Rút gọn biểu thức:

$$Q = \frac{1}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) + \frac{3}{(a^2 + b^2 + 2)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{6}{(a+b)^4}$$

2. Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1} = \sqrt{15}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = (\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{y^2+1} - y)$$

Câu 2 (2,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+3x} + 2\sqrt{x-1} = 2x + \sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x}}$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + 2x + y = 2 \\ x^2 + y^2 + 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên tố p lẻ sao cho $2p^4 - p^2 + 16$ là số chính phương.

2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x^2 + 7xy + 2y^2 + x + y - 2 = 0$.

Câu 4 (3,0 điểm)

1. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) , điểm E thuộc cung nhỏ $\widehat{AB}$ của đường tròn (O) ($E \neq A, E \neq B$). Đường thẳng AE cắt các tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) lần lượt tại M, N .

a) Chứng minh rằng $MB \cdot NC = AB^2$.

b) Gọi F là giao điểm của MC và BN , H là trung điểm BC . Chứng minh rằng ba điểm E, F, H thẳng hàng.

2. Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định nằm trên đường tròn (O) sao cho $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Điểm M thay đổi trên cung lớn $\widehat{AB}$ của đường tròn (O) . Đường tròn nội tiếp tam giác MAB tiếp xúc với MA, MB lần lượt tại E, F . Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} \geq \frac{10}{(a+b+c)^2}$$

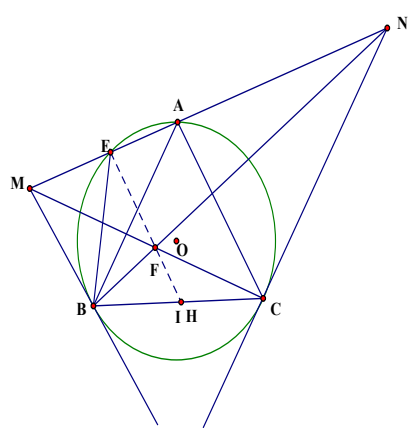
-----HẾT-----

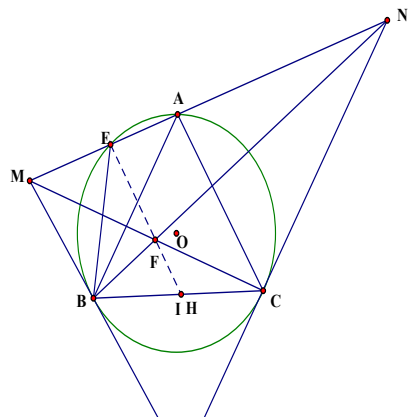
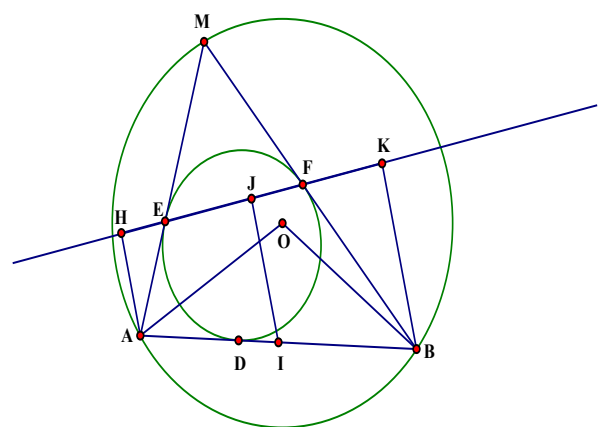
Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Cán bộ coi thi số 1 Cán bộ coi thi số 2

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1 (2 điểm)	1	Cho hai số a, b thỏa mãn các điều kiện $ab = 1, a + b \neq 0$. Rút gọn biểu thức: $Q = \frac{1}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) + \frac{3}{(a^2+b^2+2)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{6}{(a+b)^4}$	
		Ta có: $a^2 + b^2 + 2 = (a+b)^2$ Nên $Q = \frac{1}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) + \frac{3}{(a+b)^4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{6}{(a+b)^4}$ $= \frac{a^3+b^3}{(a+b)^3} + \frac{3(a^2+b^2)}{(a+b)^4} + \frac{6}{(a+b)^4}$ $= \frac{(a^3+b^3)(a+b) + 3(a^2+b^2) + 6}{(a+b)^4}$	0,25
		$= \frac{a^4+b^4+ab(a^2+b^2)+3(a^2+b^2)+6}{(a^2+b^2+2)^2}$ $= \frac{a^4+b^4+4(a^2+b^2)+6}{(a^2+b^2+2)^2}$	0,25
		$= \frac{(a^4+b^4+2a^2b^2)+4(a^2+b^2)+4}{(a^2+b^2+2)^2}$ $= \frac{(a^2+b^2)^2+4(a^2+b^2)+4}{(a^2+b^2+2)^2}$	0,25
		$= \frac{(a^2+b^2+2)^2}{(a^2+b^2+2)^2}$ $= 1$	0,25
	2	Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1} = \sqrt{15}$. Tính giá trị của biểu thức: $P = (\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{y^2+1} - y)$	
		$P = \sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1} + xy - (x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}) = \sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1} + xy - \sqrt{15}$	0,25
		Đặt $M = \sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1} + xy \Rightarrow M^2 = (x^2+1)(y^2+1) + x^2y^2 + 2xy\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}$ $= 2x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 + 2xy\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}$	0,25

		$= x^2(y^2 + 1) + y^2(x^2 + 1) + 2x\sqrt{y^2 + 1} \cdot y\sqrt{x^2 + 1} + 1$ $= (x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1})^2 + 1$	0,25
		$= 16 \Rightarrow M = 4$. Vậy $P = 4 - \sqrt{15}$.	0,25
2 (2 điểm)	1	Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 3x} + 2\sqrt{x - 1} = 2x + \sqrt{\frac{x^2 + 2x - 3}{x}}$	
		Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + 3x \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ \frac{x^2 + 2x - 3}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$	0,25
		Phương trình trở thành $\sqrt{x(x+3)} + 2\sqrt{x-1} - 2x - \sqrt{\frac{(x-1)(x+3)}{x}} = 0$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x(x+3)} - \sqrt{\frac{(x-1)(x+3)}{x}} \right) + (2\sqrt{x-1} - 2x) = 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+3}{x}}(x - \sqrt{x-1}) - 2(x - \sqrt{x-1}) = 0$ $\Leftrightarrow (x - \sqrt{x-1}) \left(\sqrt{\frac{x+3}{x}} - 2 \right) = 0$ $\begin{cases} x - \sqrt{x-1} = 0 \\ \sqrt{\frac{x+3}{x}} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{x-1} \quad (1) \\ \sqrt{\frac{x+3}{x}} = 2 \quad (2) \end{cases}$	0,25
		$(1) \Leftrightarrow x^2 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ (vô nghiệm)	0,25
		$(2) \Leftrightarrow \frac{x+3}{x} = 4 \Leftrightarrow x+3 = 4x \Leftrightarrow x = 1$ (Thoả mãn điều kiện)	0,25
	2	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy + 2x + y = 2 \\ x^2 + y^2 + 2x + 4y = 3 \end{cases}$	
		Hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} (x+1)(y+2) = 4 \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 = 8 \end{cases}$	0,25
		Đặt $\begin{cases} a = x+1 \\ b = y+2 \end{cases}$ ta được hệ $\begin{cases} ab = 4 \\ a^2 + b^2 = 8 \end{cases}$	
		$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ (a+b)^2 - 2ab = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ (a+b)^2 = 16 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ a+b = 4 \\ a+b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} ab = 4 \\ a+b = 4 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} ab = 4 \\ a+b = -4 \end{cases} \quad (2) \end{cases}$	0,25
		$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$	0,25

		$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}$	0,25
3 (2 điểm)	1	Tìm tất cả các số nguyên tố p lẻ sao cho $2p^4 - p^2 + 16$ là số chính phương.	
		Đặt $A = 2p^4 - p^2 + 16$ Với $p = 3$ thì $A = 169 = 13^2$ là số chính phương. Vậy $p = 3$ thỏa mãn.	0,25
		Với $p > 3$ thì $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Suy ra $p^4 = (p^2)^2 \equiv 1 \pmod{3}$	0,25
		Suy ra $A = 2p^4 - p^2 + 16 \equiv 2 \cdot 1 - 1 + 16 \equiv 2 \pmod{3}$	0,25
		Do các số chính phương chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1 nên A không là số chính phương.	0,25
	2	Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x^2 + 7xy + 2y^2 + x + y - 2 = 0$.	
		Ta có phương trình $6x^2 + 7xy + 2y^2 + x + y - 1 = 1$ $\Leftrightarrow 6x^2 + (7y + 1)x + 2y^2 + y - 1 = 1$ $\Leftrightarrow (2x + y + 1)(3x + 2y - 1) = 1$	0,25
		$\begin{cases} 2x + y + 1 = 1 \\ 3x + 2y - 1 = 1 \end{cases} \quad (1)$ $\begin{cases} 2x + y + 1 = -1 \\ 3x + 2y - 1 = -1 \end{cases} \quad (2)$	0,25
		$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$	0,25
		$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 6 \end{cases}$	0,25
4 (3 điểm)	1	1. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) , điểm E thuộc cung nhỏ $\widehat{AB}$ của đường tròn (O) ($E \neq A, E \neq B$). Đường thẳng AE cắt các tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) lần lượt tại M, N . a) Chứng minh rằng $MB \cdot NC = AB^2$.	
			
		Ta có $\widehat{ABM} = \widehat{ACB} = \widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow BM \parallel AC \Rightarrow \widehat{BMA} = \widehat{CAN} \quad (1)$	0,25
		Tương tự ta có $CN \parallel AB \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CNA} \quad (2)$	0,25
		Từ (1) và (2) ta có $\triangle AMB$ đồng dạng $\triangle NAC$ (g-g)	0,25
		$\Rightarrow \frac{MB}{AC} = \frac{AB}{NC} \Rightarrow MB \cdot NC = AB \cdot AC \Rightarrow MB \cdot NC = AB^2$	0,25
	2	b) Gọi F là giao điểm của MC và BN , H là trung điểm BC . Chứng minh rằng ba điểm E, F, H thẳng hàng.	

		
	Gọi I là giao điểm của EF và BC. Từ a) suy ra $MB.NC = BC^2 \Rightarrow \frac{MB}{BC} = \frac{BC}{NC}$ (3) Mặt khác $\widehat{MBC} = \widehat{MBA} + \widehat{ABC} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$. Tương tự $\widehat{BCN} = 120^\circ$ Suy ra $\widehat{MBC} = \widehat{BCN}$ (4) Từ (3) và (4) ta có $\triangle MBC$ đồng dạng $\triangle BCN$ (c-g-c). Suy ra $\widehat{BMC} = \widehat{NBC}$	0,25
	Ta có $\widehat{BFM} = \widehat{BCF} + \widehat{FBC} = \widehat{BCF} + \widehat{BMC} = 180^\circ - \widehat{MBC} = 60^\circ$ (5) Do $BEAC$ nội tiếp nên $\widehat{BEM} = \widehat{BCA} = 60^\circ$ (6) Từ (5) và (6) ta có $\widehat{BFM} = \widehat{BEM}$. Suy ra $BMEF$ nội tiếp	0,25
	$\widehat{BEF} = \widehat{BMF} = \widehat{NBC} = \widehat{FBI}$. Do đó $\triangle IBF$ đồng dạng $\triangle IEB$ (g-g). Suy ra $\frac{IB}{IE} = \frac{IF}{IB} \Rightarrow IB^2 = IE.IF$ (7)	0,25
	Chứng minh tương tự ta có $IC^2 = IE.IF$ (8). Từ (7) và (8) suy ra $IB = IC \Rightarrow I \equiv H$. Vậy E, F, H thẳng hàng.	0,25
3	2. Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định nằm trên đường tròn (O) sao cho $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Điểm M thay đổi trên cung lớn $\widehat{AB}$ của đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp tam giác MAB tiếp xúc với MA, MB lần lượt tại E, F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.  Gọi I là trung điểm của AB. Vẽ AH, IJ, BK cùng vuông góc EF. Ta có $\widehat{AOB} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} = 60^\circ$, hơn nữa $ME = MF$ nên tam giác MEF đều. Tam giác vuông AHE có $AH = AE.\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.AE = \frac{\sqrt{3}}{2}.AD$ (1)	

		Tam giác vuông BKF có $BK = BF \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} BF = \frac{\sqrt{3}}{2} BD$ (2)	
		Cộng vế (1) và (2) ta có $AH + BK = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \Rightarrow 2IJ = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \Rightarrow IJ = \frac{\sqrt{3}}{4} AB$ không đổi.	0,25
		Vì điểm I cố định nên EF tiếp xúc với đường tròn cố định tâm I , bán kính $\frac{\sqrt{3}}{4} AB$.	0,25
5 (1 điểm)	Cho a, b, c là các số không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \geq \frac{10}{(a + b + c)^2} (*)$		
	Giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Khi đó : $c \leq a \Rightarrow c^2 \leq ac \Rightarrow a^2 + c^2 \leq a^2 + ac \leq \left(a + \frac{c}{2}\right)^2$ $c \leq b \Rightarrow c^2 \leq bc \Rightarrow b^2 + c^2 \leq b^2 + bc \leq \left(b + \frac{c}{2}\right)^2$ $a^2 + b^2 \leq \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{c}{2}\right)^2$		0,25
	$VT(*) \geq \frac{1}{\left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{c}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(b + \frac{c}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(a + \frac{c}{2}\right)^2}$ Đặt $x = a + \frac{c}{2}; y = b + \frac{c}{2}$. Khi đó $x > 0, y > 0$ và $x + y = a + b + c$. Ta có $VT(*) \geq \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}$		0,25
	$\geq \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy} + \frac{3}{2xy} \geq \frac{4}{x^2 + y^2 + 2xy} + \frac{3}{2xy}$ $= \frac{4}{(x + y)^2} + \frac{3}{2xy} \geq \frac{4}{(x + y)^2} + 3 \cdot \frac{2}{(x + y)^2} = \frac{10}{(x + y)^2} = \frac{10}{(a + b + c)^2} = VP(*)$		0,25
	Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} c = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = b \end{cases}$. Do vai trò của a, b, c bình đẳng nên dấu “=” của (*) xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a, b, c có một số bằng 0 và hai số còn lại bằng nhau.		0,25

Lưu ý: Học sinh giải theo cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.