

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x^2}{x^2 - 5x + 6} + \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2} \right) \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{x^4 + x^2 + 1}$.

Rút gọn P và tìm giá trị lớn nhất của P .

2. a) Phân tích đa thức $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ thành nhân tử.

b) Cho hai số thực phân biệt a và b khác 0 thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{3}{ab} = 1. \text{ Tính giá trị của biểu thức } T = [(a-1)(b-1)]^{2023}.$$

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình : $\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{48}$.

2. Lúc 8 giờ, An rời nhà mình để đến nhà Bích với vận tốc 4km/h. Lúc 8 giờ 20 phút, Bích cũng rời nhà mình để đến nhà An với vận tốc 3 km/h. An gặp Bích trên đường, rồi cả hai cùng đi về nhà Bích. An ở nhà Bích chơi một thời gian rồi đi về một mình. Về đến nhà An tính ra quãng đường mình đã đi dài gấp bốn lần quãng đường Bích đã đi. Tính quãng đường từ nhà An đến nhà Bích (với giả thiết An và Bích cùng đi trên một quãng đường).

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 - 4xy + 5y^2 - 16 = 0$.

2. Giả sử p, q là 2 số nguyên tố thỏa mãn đồng thời các điều kiện $p > q > 3$,

$p - q = 2$. Chứng minh rằng $p^3 + q^3$ chia hết cho 36.

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ và điểm H thuộc cạnh BC (H không trùng với B và C). Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa hình vuông $ABCD$ dựng hình vuông $CHIK$. Gọi M là giao điểm DH và BK ; N là giao điểm KH và BD .

1. Chứng minh DH vuông góc với BK và $DN \cdot DB = DC \cdot DK$.

2. Chứng minh $\frac{BH}{HC} = \frac{S_{BHD} + S_{BHK}}{S_{DHK}}$ và $\frac{BH}{HC} + \frac{DH}{HM} + \frac{KH}{HN} > 6$.

3. Gọi P là giao điểm của CN và DH . Qua P kẻ đường thẳng song song với BD cắt BC, BK lần lượt tại E, Q . Chứng minh E là trung điểm của PQ .

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{a}{2b^3 + 1} + \frac{b}{2c^3 + 1} + \frac{c}{2a^3 + 1}$.

-----HẾT-----

Họ và tên thi sinh..... Số báo danh

HƯỚNG DẪN CHẤM

Hướng dẫn chấm gồm có 05 trang.

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1	1	1.Cho biểu thức $P = \left(\frac{x^2}{x^2 - 5x + 6} + \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2} \right) \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{x^4 + x^2 + 1}$ Rút gọn P và tìm giá trị lớn nhất của P.	2,5
		ĐKXĐ: $x \neq 1; x \neq 2; x \neq 3$	0.25
		$P = \left(\frac{x^2}{(x-2)(x-3)} + \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} \right) \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{x^4 + x^2 + 1}$	0.5
		$P = \left[\frac{x^2(x-1) + x^2(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \right] \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{x^4 + x^2 + 1}$	0,25
		$P = \left(\frac{2x^2}{(x-1)(x-3)} \right) \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{x^4 + x^2 + 1}$	0.5
		$P = \frac{2x^2}{x^4 + x^2 + 1}$	0,25
		Vậy với $x \neq 1; x \neq 2; x \neq 3$ thì $P = \frac{2x^2}{x^4 + x^2 + 1}$	0.25
		Nếu $x = 0$ thì $P = 0$	0,25
		Nếu $x \neq 0$ thì $P = \frac{2x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{2}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 3} \leq \frac{2}{3}$	0,25
		Dấu “=” xảy ra khi $x = -1$ Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{2}{3}$ đạt được khi $x = -1$.	
2	2.a)	Phân tích đa thức $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ thành nhân tử	1,0
		$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz$ $= \left[(x+y)^3 + z^3 \right] - \left[3xy(x+y) + 3xyz \right]$	0,5
		$= (x+y+z) \left[(x+y)^2 - z(x+y) + z^2 \right] - 3xy(x+y+z)$	0.25
		$= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \quad (*)$	0,25

2		2.b) Cho hai số thực phân biệt a và b khác 0 thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{3}{ab} = 1$. Tính giá trị của $T = [(a-1)(b-1)]^{2023}$.	0,5
		Áp dụng kết quả (*) với $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = -1$. $0 = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} - 1 + \frac{3}{ab} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1\right) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 1 - \frac{1}{ab} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad (*)$	0,25
		Mà $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 1 - \frac{1}{ab} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{a} + 1\right)^2 + \left(\frac{1}{b} + 1\right)^2 + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 \right] > 0$ (vì $a \neq b$) Nên (*) $\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1 = 0 \Leftrightarrow a + b = ab \Leftrightarrow ab - a - b + 1 = 1$ Do đó $T = (ab - a - b + 1)^{2023} = 1$	0,25
	1	Giải phương trình : $\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{48} \quad (1)$	3,0
		ĐKXĐ: $x \neq \pm 1, x \neq -3$.	0,25
		Ta có: $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x+3)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{48} \Leftrightarrow \frac{4}{(x-1)(x+3)(x+1)^2} = \frac{1}{48}$	0,5
		$(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x + 1) = 192$ Đặt $x^2 + 2x - 1 = a$ ta có phương trình: $(a-2)(a+2) = 192$	0,5
		$\Leftrightarrow a^2 = 196 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ a = -14 \end{cases}$	0,5
		Với $a = 14 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 14 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 3 \end{cases}$ (thỏa mãn ĐKXĐ)	0,5
		Với $a = -14 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = -14$. Phương trình vô nghiệm. Vậy $S = \{-5; 3\}$	0,25
	2	Lúc 8 giờ, An rời nhà mình để đến nhà Bích với vận tốc 4km/h. Lúc 8 giờ 20 phút, Bích cũng rời nhà mình để đến nhà An với vận tốc 3 km/h. An gặp Bích trên đường, rồi cả hai cùng đi về nhà Bích. An ở nhà Bích chơi một thời gian rồi đi về một mình. Về đến nhà An tính ra quãng đường mình đã đi dài gấp bốn lần quãng đường Bích đã đi. Tính quãng đường từ nhà An đến nhà Bích (với giả thiết An và Bích cùng đi trên một quãng đường).	1,0
		Xem quãng đường từ nhà An đến nhà Bích theo thứ tự đó là AB. Gọi quãng đường từ nhà An đến nhà Bích là x (km). $x > 0$ Quãng đường An đã đi là $2x$ (km) Quãng đường Bích đã đi là $\frac{2x}{4} = \frac{x}{2}$ (km)	0.25
		Gọi C là chỗ hai người gặp nhau thì $BC = \frac{x}{2} : 2 = \frac{x}{4}$ (km), $AC = \frac{3}{4}x$. Thời gian An đi đoạn AC là $\frac{3x}{4} : 4 = \frac{3x}{16}$ (giờ)	0.25

		Thời gian Bích đi đoạn BC là $\frac{x}{4} : 3 = \frac{x}{12}$ (giờ)	0.25
		Ta có phương trình $\frac{3x}{16} - \frac{x}{12} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 3,2$ (t/m) Vậy quãng đường từ nhà An đến nhà Bích là 3.2 (km).	0,25
	1	Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 - 4xy + 5y^2 - 16 = 0$	2,5
		$x^2 - 4xy + 5y^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 2y)^2 + y^2 = 16$ (*)	0.25
		Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x - 2y \in \mathbb{Z}$, do đó từ (*) suy ra: $\begin{cases} (x-2y)^2 = 16 \\ y^2 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} (x-2y)^2 = 0 \\ y^2 = 16 \end{cases}$	0.5
		1) $\begin{cases} (x-2y)^2 = 16 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 8 \\ y = 0 \end{cases}$	0.75
		2) $\begin{cases} (x-2y)^2 = 0 \\ y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = -4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}$	0.75
3		Vậy các cặp số nguyên (x; y) cần tìm là (-4; 0), (4; 0), (8; 4), (-8; -4)	0,25
	2	Giả sử p, q là 2 số nguyên tố thỏa mãn đồng thời các điều kiện $p > q > 3, p - q = 2$. Chứng minh rằng $p^3 + q^3$ chia hết cho 36.	1,5
		Xét các số p, q có dạng $6k + r$ ($r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$), k là số tự nhiên	0,25
		Dễ thấy, khi p, q là các số nguyên tố lớn hơn 5 thì các số $6k, 6k+2, 6k+3, 6k+4$ đều là hợp số nên các số p, q có dạng $6k + 1$ hoặc $6k + 5$.	0,5
		Vì $p - q = 2$ nên : Nếu $p = 6k+5$ thì $q = 6k+3$, lúc này q lại là hợp số, trái giả thiết q là số nguyên tố.	0,25
		Nếu $p = 6k+1$ thì $q = 6k - 1$. Khi đó $p^3 + q^3 = (p+q)[(p-q)^2 + pq] = (p+q)(4 + pq)$	0,25
		$= 12k(36k^2 + 3) = 36k(12k^2 + 1) : 36$. Vậy $p^3 + q^3$ chia hết cho 36	0,25
4		Cho hình vuông ABCD và điểm H thuộc cạnh BC (H không trùng với B và C). Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa hình vuông ABCD dựng hình vuông CHIK. Gọi M là giao điểm DH và BK ; N là giao điểm KH và BD. 1. Chứng minh DH vuông góc với BK và $DN \cdot DB = DC \cdot DK$ 2. Chứng minh $\frac{BH}{HC} = \frac{S_{BHD} + S_{BHK}}{S_{DHK}}$ và $\frac{BH}{HC} + \frac{DH}{HM} + \frac{KH}{HN} > 6$. 3. Gọi P là giao điểm của CN và DH. Qua P kẻ đường thẳng song song với BD cắt BC, BK lần lượt tại E, Q. Chứng minh E là trung điểm của PQ.	6,0

1 3đ	1.	Vì các tứ giác ABCD, CHIK là các hình vuông nên D, C, K thẳng hàng và $\widehat{BDC} = 45^\circ; \widehat{CKH} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BDC} + \widehat{CKH} = 90^\circ \Rightarrow KH \perp BD$	1,0
		Tam giác BKD có $BC \perp KD; KH \perp BD$ nên H là trực tâm. $\Rightarrow DH \perp BK$	0.5
		Xét tam giác DNK và tam giác DCB có : $\begin{cases} \widehat{NDK} : chung \\ \widehat{DNK} = \widehat{DCB} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta DNK \sim \Delta DCB (g.g)$	1,0
		$\Rightarrow \frac{DN}{DC} = \frac{DK}{DB} \Leftrightarrow DN \cdot DB = DC \cdot DK$	0,5
2 2,5 đ		Ta có : $\frac{BH}{HC} = \frac{BH \cdot DC}{HC \cdot DC} = \frac{BH \cdot CK}{HC \cdot CK} = \frac{2S_{BHD}}{2S_{DHC}} = \frac{2S_{BHK}}{2S_{CHK}} = \frac{S_{BHD} + S_{BHK}}{S_{DHK}}$	1,0
		Tương tự : $\frac{DH}{HM} = \frac{S_{BHD} + S_{DHK}}{S_{BHK}}; \frac{HK}{HN} = \frac{S_{BHK} + S_{DHK}}{S_{BHD}}$	0.5
		Suy ra: $\frac{BH}{HC} + \frac{DH}{HM} + \frac{KH}{HN} = \left(\frac{S_{BHD}}{S_{DHK}} + \frac{S_{DHK}}{S_{BHD}} \right) + \left(\frac{S_{BHK}}{S_{DHK}} + \frac{S_{DHK}}{S_{BHK}} \right) + \left(\frac{S_{BHD}}{S_{BHK}} + \frac{S_{BHK}}{S_{BHD}} \right)$	0.5
		Theo bất đẳng thức Cô si ta có : $\frac{S_{BHD}}{S_{DHK}} + \frac{S_{DHK}}{S_{BHD}} \geq 2; \frac{S_{BHD}}{S_{BHK}} + \frac{S_{BHK}}{S_{BHD}} \geq 2;$ $\frac{S_{BHK}}{S_{DHK}} + \frac{S_{DHK}}{S_{BHK}} \geq 2$.Do đó : $\frac{BH}{HC} + \frac{DH}{HM} + \frac{KH}{HN} \geq 6$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow S_{BHD} = S_{BHK} = S_{DHK} \Leftrightarrow DC = CK$ (vô lí vì $DC = BC > CK$). Dấu bằng không xảy ra . Vậy $\frac{BH}{HC} + \frac{DH}{HM} + \frac{KH}{HN} > 6$ (đpcm)	0,5

3 0,5 d	Xét tam giác DNC và tam giác DKB có : $\begin{cases} \widehat{NDC} : chung \\ \frac{DN}{DK} = \frac{DC}{DB} \text{ (vì } DN \cdot DB = DC \cdot DK) \end{cases} \Rightarrow \triangle DNC \sim \triangle DKB \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{DCN} = \widehat{DBK}.$ Tương tự $\widehat{KCM} = \widehat{KBD} \Rightarrow \widehat{DCN} = \widehat{KCM} \Rightarrow \widehat{NCB} = \widehat{MCB}$ Suy ra CH là đường phân giác trong, CD là đường phân giác ngoài của tam giác PCM (vì $DC \perp CH$). $\Rightarrow \frac{HP}{HM} = \frac{DP}{DM} \left(= \frac{CP}{CM} \right) \text{ (tính chất đường phân giác trong tam giác PCM).}$ $\Rightarrow \frac{DM}{HM} = \frac{DP}{HP} = \frac{DM + DP}{HM + HP} = \frac{2DM - PM}{PM} = \frac{2DM}{PM} - 1 \quad (1)$ Mặt khác $\frac{DP}{HP} = \frac{DH - HP}{HP} = \frac{DH}{HP} - 1 \quad (2)$ Từ (1), (2) Suy ra: $\frac{2DM}{PM} = \frac{DH}{HP} \Leftrightarrow \frac{HP}{HD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{MP}{MD} \quad (3)$ Áp dụng định lí ta-lét vào các tam giác BHD, BMD ta có: $\frac{HP}{HD} = \frac{PE}{BD}; \quad \frac{MP}{MD} = \frac{PQ}{BD} \quad (4)$ $(3), (4) \Rightarrow \frac{PE}{BD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{PQ}{BD} \Leftrightarrow PQ = 2PE, \text{ suy ra E là trung điểm của PQ.}$	0,25 0,25
5	Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{a}{2b^3 + 1} + \frac{b}{2c^3 + 1} + \frac{c}{2a^3 + 1}$ Các bất đẳng thức quen thuộc (học sinh phải chứng minh) $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \quad (1); \quad x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz \quad \forall x, y, z > 0 \quad (2).$ Áp dụng bất đẳng thức (2) ta có: $\frac{a}{2b^3 + 1} = \frac{a(2b^3 + 1) - 2ab^3}{2b^3 + 1} = a - \frac{2ab^3}{2b^3 + 1} = a - \frac{2ab^3}{b^3 + b^3 + 1} \geq a - \frac{2ab}{3}$ Tương tự: $\frac{b}{2c^3 + 1} \geq b - \frac{2bc}{3}; \quad \frac{c}{2a^3 + 1} \geq c - \frac{2ca}{3}$ $\Rightarrow A = \frac{a}{2b^3 + 1} + \frac{b}{2c^3 + 1} + \frac{c}{2a^3 + 1} \geq (a + b + c) - \frac{2}{3}(ab + bc + ca) = (a + b + c) - 2 \quad (3)$ Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có: $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) = 9$ $\Rightarrow a + b + c \geq 3 \quad (4)$ Từ (3) và (4) suy ra $A \geq 1$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$. Vậy $\min A = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 1$.	2,0 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25

Lưu ý: - Câu IV: Nếu thí sinh không vẽ hình hoặc vẽ sai hình thì không chấm điểm.

- Điểm bài thi làm tròn đến 0,25.

- Nếu thí sinh làm cách khác mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa.