

(Đề có 01 trang, gồm 05 câu)

**Câu I. (4,0 điểm)** Tính giá trị của các biểu thức sau:

1.  $A = \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^{10}.6^{19} - 7.2^{29}.27^6}$

2.  $B = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2022.2024}\right)$

**Câu II. (4,0 điểm)**

1. Tìm số nguyên dương  $x$  biết:

$$1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{x}(1+2+3+\dots+x) = 115$$

2. Cho  $x, y, z$  là các số thực khác 0, thỏa mãn  $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

Tính giá trị của biểu thức:  $A = 4048.x + y^{2023} + z^{2023}$ .

3. Cho ba hình chữ nhật, biết diện tích hình thứ nhất và hình thứ hai tỉ lệ với 4 và 5, diện tích hình thứ hai và hình thứ ba tỉ lệ với 7 và 8. Hình thứ nhất và hình thứ hai có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là 27cm, Hình thứ hai và hình thứ ba có cùng chiều rộng và chiều dài của hình thứ ba là 24cm. Tính diện tích mỗi hình chữ nhật đó.

**Câu III. (4,0 điểm)**

1. Tìm  $x, y$  biết:  $|x^2 - 1| + 2 = \frac{6}{(y+1)^2+3}$

2. Chứng minh không tồn tại 4 số nguyên tố  $a, b, c, d$  khác nhau thỏa mãn:  $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$ .

**Câu IV. (6,0 điểm)**

Cho tam giác  $ABC$  có  $AB < AC$ . Từ trung điểm  $D$  của  $BC$  vẽ đường vuông góc với tia phân giác của góc  $A$  tại  $H$ . Đường thẳng này cắt các tia  $AB$  tại  $E$  và  $AC$  tại  $F$ . Vẽ tia  $BM$  song song với  $EF$  ( $M \in AC$ ).

a) Chứng minh  $\triangle ABM$  cân.

b) Chứng minh:  $MF = BE = CF$ .

c) Qua  $D$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $BC$  cắt tia  $AH$  tại  $I$ . Tính  $\widehat{IFC}$

**Câu V. (2,0 điểm)**

Trong một bảng ô vuông gồm  $5 \times 5$  ô vuông, người ta viết vào mỗi ô vuông chỉ một trong ba số 1; 0 hoặc -1. Chứng minh rằng trong các tổng của 5 số theo mỗi cột, mỗi hàng, mỗi đường chéo phải có ít nhất hai tổng bằng nhau.

----- Hết -----

Họ tên thí sinh:..... Số báo danh: .....

Giám thị số 1:..... Giám thị số 2: .....

Giám thị không giải thích gì thêm.

| Câu                                    | NỘI DUNG                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Điểm                                              |
|----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| <b>I</b><br><b>4,0</b><br><b>điểm</b>  | $1. A = \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^{10}.6^{19} - 7.2^{29}.27^6}$ $= \frac{5.2^{2.15}.3^{2.9} - 2^2.3^{20}.2^{3.9}}{5.2^{10}.2^{19}.3^{19} - 7.2^{29}.3^{3.6}}$ $= \frac{2^{29}.3^{18}(5.2 - 3^2)}{2^{29}.3^{18}(5.3 - 7)}$ $= \frac{10 - 9}{15 - 7} = \frac{1}{8}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <p>0,5đ</p> <p>1,0đ</p> <p>0,5đ</p>               |
|                                        | <p>2.</p> $B = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2022.2024}\right)$ $= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1.3+1}{1.3}\right) \cdot \left(\frac{2.4+1}{2.4}\right) \cdot \left(\frac{3.5+1}{3.5}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{2022.2024+1}{2022.2024}\right)$ $= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{2023}{2022} \cdot \frac{2023}{2024}\right)$ $= \frac{1.2.3.4 \cdot \dots \cdot 2022.2023}{1.2.3.4 \cdot \dots \cdot 2022} \cdot \frac{2.3.4 \cdot \dots \cdot 2022.2023}{2.3.4 \cdot \dots \cdot 2023.2024}$ $= \frac{2023}{2024}$ | <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>   |
| <b>II</b><br><b>4,0</b><br><b>điểm</b> | <p>1.</p> $1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{x}(1+2+3+\dots+x) = 115$ $1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2.3}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3.4}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{4.5}{2}\right) + \dots + \frac{1}{x} \cdot \left[\frac{x(x+1)}{2}\right] = 115$ $1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2} \cdot [2+3+4+\dots+(x+1)] = 115$ $\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x(x+3)}{2}\right] = 115$ $x(x+3) = 460$ <p>Mà <math>x</math> là số nguyên dương nên <math>x</math> và <math>x+3</math> là ước dương của 460 nên <math>x = 20</math><br/>Vậy <math>x=20</math></p>                                                                                                                                                                       | <p>0,25đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,25đ</p> |
|                                        | <p>Từ đề bài ta có <math>x, y, z</math> và <math>x + y + z</math> khác 0<br/>Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:</p> $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} = 2$ $\Rightarrow x + y + z = 0,5 \Rightarrow \frac{0,5-x+1}{x} = \frac{0,5-y+2}{y} = \frac{0,5-z-3}{z} = 2$ $\Rightarrow x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = -\frac{5}{6}$ <p>Khi đó ta có <math>4048.x + y^{2023} + z^{2023} = 4048 \cdot \frac{1}{2} + 0 = 2024</math><br/>Vậy với <math>x, y, z</math> là các số thực thỏa mãn</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                | <p>0,25đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>              |

|                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                           |
|-------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
|                         | $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$ thì giá trị của biểu thức A= 4046.x + y <sup>2023</sup> + z <sup>2023</sup> là 2023<br>3.Gọi diện tích các hình chữ nhật thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là S <sub>1</sub> ,S <sub>2</sub> ,S <sub>3</sub> ; các chiều dài và chiều rộng tương ứng lần lượt là d <sub>1</sub> ,r <sub>1</sub> ;d <sub>2</sub> ,r <sub>2</sub> ;d <sub>3</sub> ,r <sub>3</sub> (S <sub>1</sub> ,S <sub>2</sub> ,S <sub>3</sub> ,d <sub>1</sub> ,r <sub>1</sub> ;d <sub>2</sub> ,r <sub>2</sub> ;d <sub>3</sub> ,r <sub>3</sub> >0). Theo đề bài ta có:<br>$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5}; \frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8}$ và d <sub>1</sub> =d <sub>2</sub> ; r <sub>1</sub> +r <sub>2</sub> =27; r <sub>2</sub> =r <sub>3</sub> ; d <sub>3</sub> =24<br>Từ $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5} = \frac{d_1.r_1}{d_2.r_2} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{r_1}{4} = \frac{r_2}{5} = \frac{r_1+r_2}{4+5} = \frac{27}{9} = 3$ (Do d <sub>1</sub> =d <sub>2</sub> )<br>$\Rightarrow r_1 = 12\text{cm}; r_2 = 15\text{cm} \Rightarrow r_3 = 15\text{cm}$<br>Từ $\frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} = \frac{d_2.r_2}{d_3.r_3} = \frac{d_2}{d_3}$ (Do r <sub>2</sub> =r <sub>3</sub> ) $\Rightarrow d_2 = \frac{7}{8}.d_3 = \frac{7}{8}.24 = 21\text{cm} \Rightarrow d_1 = 21\text{cm}$<br>Từ đó tính được S <sub>1</sub> =252cm <sup>2</sup> ; S <sub>2</sub> =315cm <sup>2</sup> ; S <sub>3</sub> =360cm <sup>2</sup><br>Vậy diện tích các hình chữ nhật thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là 252 cm <sup>2</sup> ; 315cm <sup>2</sup> ; 360cm <sup>2</sup> . | 0,25đ<br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br> |
| <b>III<br/>4,0 điểm</b> | Ta có:  x <sup>2</sup> -1  ≥ 0 =>  x <sup>2</sup> -1  + 2 ≥ 0 + 2 = 2 (1)<br>Mà (y+1) <sup>2</sup> ≥ 0 => (y+1) <sup>2</sup> + 3 ≥ 3 => $\frac{6}{(y+1)^2+3} \leq 2$ (2)<br>Từ (1) và (2) =>  x <sup>2</sup> -1  + 2 = $\frac{6}{(y+1)^2+3}$<br>Khi $\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ hoặc } x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$<br>Vậy x = -1,y = 1 hoặc x = 1,y = 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 0,5<br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br>   |
|                         | 2. Giả sử cả 4 số a, b, c, d đều là số lẻ thì a <sup>2</sup> , b <sup>2</sup> , c <sup>2</sup> , d <sup>2</sup> đều chia 4 dư 1.<br>Mà : a <sup>2</sup> = b <sup>2</sup> + c <sup>2</sup> + d <sup>2</sup> nên a <sup>2</sup> chia 4 dư 3 ( vô lí). Suy ra trong 4 số a, b, c, d phải có ít nhất một số chẵn.<br>Vì a <sup>2</sup> = b <sup>2</sup> + c <sup>2</sup> + d <sup>2</sup> và a, b, c, d khác nhau nên a > b, c, d; a > 2<br>Không mất tính tổng quát, giả sử b = 2 thì a <sup>2</sup> = 4 + c <sup>2</sup> + d <sup>2</sup> .<br>Vì a <sup>2</sup> chia 4 dư 1, 4 + c <sup>2</sup> + d <sup>2</sup> chia 4 dư 2 (vô lí)<br>Suy ra ĐPCM                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,5<br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br>   |
| <b>IV<br/>6,0 điểm</b>  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                           |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                               |
|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
|  | 1.<br>Gọi giao điểm của AH và BM là N<br>Ta có $BM \parallel EF$ (gt)<br>$HA \perp EF$ (gt)<br>$\Rightarrow AH \perp BM$ hay $AN \perp BM$<br>Chứng minh được $\triangle ABN = \triangle AMN$ (g.c.g)<br>$\Rightarrow AB = AM$ (hai cạnh tương ứng)<br>$\Rightarrow \triangle ABM$ cân tại A                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0,5đ<br>0,5 đ<br>0,5đ<br>0,5đ |
|  | 2. Kẻ $BK \parallel AC$ ( $K \in EF$ )<br>Chứng minh được $\triangle AEH = \triangle AFH$ (g.c.g) $\Rightarrow AE = AF$<br>Mà $AB = AM \Rightarrow AE - AB = AF - AM \Rightarrow BE = MF$ (1)<br>Chứng minh $\triangle BDK = \triangle CDF$ (g.c.g) $\Rightarrow BK = CF$ (2)<br>Ta có $\widehat{BKE} = \widehat{AFE}$ (hai góc đồng vị của $BK \parallel AC$ )<br>và $\widehat{AEF} = \widehat{AFE}$ (vì $\triangle AEF$ cân tại A)<br>$\Rightarrow \widehat{BKE} = \widehat{BEF} \Rightarrow \triangle EBK$ cân tại B $\Rightarrow BE = BK$ (3)<br>Từ (1); (2) và (3) ta có $MF = BE = CF$ | 0,5đ<br>0,5đ<br>0,5đ<br>0,5đ  |
|  | Nối IB, IC và chứng minh được $IB = IC$ ( Tính chất đường trung trực)<br>Chứng minh $\triangle AIE = \triangle AIF$ (c.g.c) $\Rightarrow IE = IF$ và $\widehat{AEI} = \widehat{AFI}$ (4)<br>Chứng minh $\triangle IEB = \triangle IFC$ (c.c.c) $\widehat{BEI} = \widehat{IFC}$ hay $\widehat{AEI} = \widehat{IFC}$ (5)<br>Từ (4) và (5) $\widehat{AFI} = \widehat{IFC}$ mà $\widehat{AFI} + \widehat{IFC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)<br>$\widehat{AFI} = \widehat{IFC} = 90^\circ$<br>Vậy $\widehat{IFC} = 90^\circ$                                                                       | 0,5đ<br>0,5đ<br>0,5đ<br>0,5đ  |
|  | <b>V</b><br><b>2,0</b><br><b>điểm</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                               |
|  | Ta có 5 cột, 5 dòng , 2 đường chéo nên được 12 tổng . Mỗi ô vuông nhận một trong ba giá trị 1; 0 hoặc -1 nên mỗi tổng nhận được một trong các giá trị từ -5 đến 5.<br>Ta có 11 số nguyên từ -5 đến 5 là -5; -4; -3; ....; 3; 4; 5.<br>Vậy theo nguyên tắc Dirichlet phải có ít nhất hai tổng bằng nhau                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 1,0đ<br>1,0đ                  |
|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                               |
|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                               |
|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                               |
|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                               |
|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                               |
|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                               |

**Chú ý:**

- Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa, điểm thành phần giám khảo tự phân chia trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.
- Các trường hợp khác tổ chấm thống nhất phương án chấm.