

A. ĐỀ BÀI

I. TRẮC NGHIỆM (1 điểm)

Trả lời câu hỏi bằng cách viết lại chữ cái đứng trước đáp án đúng vào bài làm:

Câu 1:

Nếu x thỏa mãn điều kiện $\sqrt{3+\sqrt{x}} = 2$ thì x nhận giá trị là:

- A. 0 B. 4 C. 5 D. 1

Câu 2:

Điều kiện để hàm số bậc nhất $y = (1-m)x + m$ ($m \neq 1$) là hàm số nghịch biến là:

- A. $m > 1$ B. $m \geq 1$ C. $m \leq 1$ D. $m < 1$

Câu 3:

Cho tam giác MNP vuông tại M, đường cao MH. Chọn hệ thức sai:

- A. $MH^2 = HN \cdot HP$ B. $MP^2 = NH \cdot HP$
C. $MH \cdot NP = MN \cdot MP$ D. $\frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2} = \frac{1}{MH^2}$

Câu 4:

Cho hai đường tròn $(I; 7cm)$ và $(K; 5cm)$. Biết $IK = 2cm$. Quan hệ giữa hai đường tròn là:

- A. Tiếp xúc trong B. Tiếp xúc ngoài
C. Cắt nhau D. Đụng nhau

II. TỰ LUẬN (9 ĐIỂM)

Bài 1. (1 điểm)

Thực hiện phép tính: a) $3\sqrt{\frac{1}{3}} + 4\sqrt{12} - 5\sqrt{27}$ b) $\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}-1}$

Bài 2. (2 điểm)

Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{x-2\sqrt{x}}{x-4}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ ($x \geq 0; x \neq 4$)

a) Rút gọn P.

b) Tìm x sao cho $P = 2$.

c) Biết $M = P : Q$. Tìm giá trị của x để $M^2 < \frac{1}{4}$.

Bài 3. (2 điểm)

Cho hàm số $y = (m-4)x + 4$ có đồ thị là đường thẳng (d) ($m \neq 4$)

a) Tìm m để đồ thị hàm số đi qua $A(1; 6)$.

b) Vẽ đồ thị hàm số với m vừa tìm được ở câu a. Tính góc tạo bởi đồ thị hàm số vừa vẽ với trục Ox (làm tròn đến phút).

c) Tìm m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(d_1): y = (m - m^2)x + m + 2$.

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ tiếp tuyến AE đến đường tròn (O) (với E là tiếp điểm). Vẽ dây EH vuông góc với AO tại M .

a) Cho biết bán kính $R = 5cm$; $OM = 3cm$. Tính độ dài dây EH .

b) Chứng minh: AH là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

c) Đường thẳng qua O vuông góc với OA cắt AH tại B . Vẽ tiếp tuyến BF với đường tròn (O) (F là tiếp điểm). Chứng minh: 3 điểm E, O, F thẳng hàng và $BF \cdot AE = R^2$.

d) Trên tia HB lấy điểm I ($I \neq B$), qua I vẽ tiếp tuyến thứ hai với đường tròn (O) cắt các đường thẳng BF, AE lần lượt tại C và D . Vẽ đường thẳng IF cắt AE tại Q . Chứng minh: $AE = DQ$.

Bài 5. (0,5 điểm)

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y \leq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \sqrt{1 + x^2 y^2}$.

B. LỜI GIẢI

I. TRẮC NGHIỆM

Câu 1:

Đáp án: D

Câu 2:

Đáp án: B

Câu 3:

Đáp án: B

Câu 4:

Đáp án: A

II. TỰ LUẬN

Bài 1.

$$a) 3\sqrt{\frac{1}{3}} + 4\sqrt{12} - 5\sqrt{27} = \sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$$

$$b) \frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{(3+2\sqrt{3})\sqrt{3}}{3} - \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{3\sqrt{3}+6-2\sqrt{3}-2}{2} = \frac{\sqrt{3}+4}{2}$$

Bài 2.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{x-2\sqrt{x}}{x-4} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}+x-2\sqrt{x}-x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \end{aligned}$$

$$P = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$$

$$M = P : Q = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

$$\Rightarrow M^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{2} \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}+2)} < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 2 \Rightarrow x < 4$$

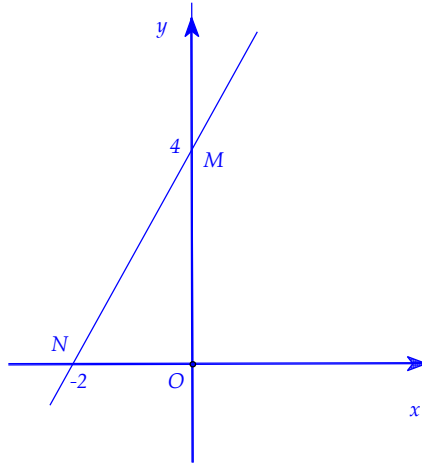
Kết hợp điều kiện $\Rightarrow 0 \leq x < 4$

Bài 3.

a. Thay $x = 1$; $y = 6$ vào hàm số $y = (m-4)x + 4$ ta được $6 = (m-4).1 + 4 \Rightarrow m = 6$.

b. $m = 6 \Rightarrow y = 2x + 4$

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 4$; $y = 0 \Rightarrow x = -2$. Đường thẳng $y = 2x + 4$ qua 2 điểm $M(0; 4)$ và $N(-2; 0)$.



Gọi α là góc tạo bởi đồ thị với trục $Ox \Rightarrow \tan \alpha = a = 2 \Rightarrow \alpha \approx 63^\circ 26'$.

$$c. (d) // (d_1) \Rightarrow \begin{cases} m - m^2 = m - 4 \\ m + 2 \neq 4 \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \Rightarrow m = -2. \end{cases}$$

Bài 4.

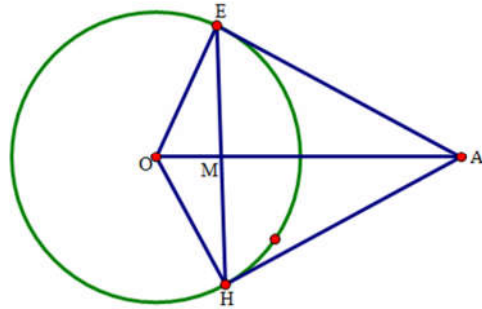
a) Theo đề ta có: $EH \perp OA$ tại M nên M là trung điểm của EH

hay $EH = 2EM$.

Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác vuông OME có:

$$EM = \sqrt{OE^2 - OM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

Vậy $EH = 2EM = 8$ (cm)



b) Ta có: $\begin{cases} OA \perp EH \\ ME = MH \end{cases} \Rightarrow OA$ là đường trung trực của EH .

Suy ra: $AE = AH$

Xét hai tam giác OEA và tam giác OHA có:

$$OE = OH (= R)$$

$$AE = AH \text{ (cmt)}$$

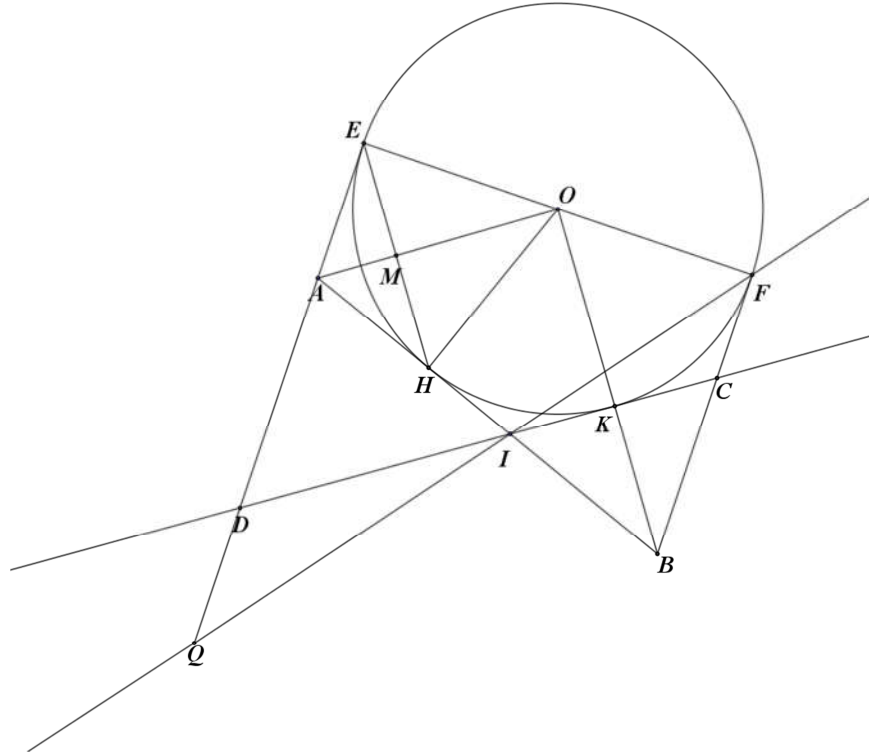
OA chung

Nên $\triangle OEA = \triangle OHA$ (c-c-c)

Suy ra: $\angle OHA = \angle OEA = 90^\circ$

Hay $AH \perp OH$

Vậy AH là tiếp tuyến của đường tròn tâm O .



c) Có $OH \perp AH$ hay B là giao của hai tiếp tuyến $BH; BF$.

Vậy, $\widehat{BOF} = \widehat{BOH}$, lại có $\widehat{EOA} = \widehat{HOA}$ nên $\widehat{EOA} + \widehat{AOB} + \widehat{BOF} = 2(\widehat{AOH} + \widehat{BOH}) = 2\widehat{AOB} = 180^\circ$

Tức là E, O, F thẳng hàng; $\widehat{AOE} + \widehat{BOF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OAE} = \widehat{BOF}$ (cùng phụ $\widehat{AOE}$).

$$\Rightarrow \triangle AOE \sim \triangle OBF$$

$$\text{Tức là } \frac{AE}{OF} = \frac{OE}{BF} \Rightarrow AE.BF = OE.OF = R^2 (1).$$

d)

$$BF \parallel AQ \Rightarrow \frac{BF}{CF} = \frac{AQ}{DQ} (*) (Talet)$$

Để dàng chứng minh $\triangle COD$ vuông tại O , áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông $\triangle COD$ ta có:

$$OK^2 = DK.CK$$

Mà DE, DK là các tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại D nên $DE = DK$;

Tương tự $CK = CF$.

$$\Rightarrow OK^2 = CF.DE \Leftrightarrow CF.DE = R^2 (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$CF.DE = AE.BF \Leftrightarrow \frac{BF}{CF} = \frac{DE}{AE} (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra:

$$\frac{AQ}{DQ} = \frac{DE}{AE} \Leftrightarrow \frac{AQ}{AQ - DQ} = \frac{DE}{DE - AE} \Leftrightarrow \frac{AQ}{AD} = \frac{DE}{AD} \Leftrightarrow AQ = DE$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 5.

Với a, b là hai số thực không âm ta có $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (1).

Thật vậy (1) $\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ (luôn đúng) $\Rightarrow$ đpcm.

Áp dụng (1) ta được.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} = \frac{2}{\sqrt{xy}} \quad (\text{do } \frac{1}{x}; \frac{1}{y} \text{ là các số thực dương}).$$

$$\text{Vậy } P \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \cdot \sqrt{1 + x^2 y^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy} + xy}.$$

Ta có:

$$1 \geq x + y \geq 2\sqrt{xy} \quad (\text{do } x; y \text{ là hai số thực dương}) \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4}.$$

$$\frac{1}{xy} + xy = \frac{1}{16xy} + xy + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{xy} \geq 2\sqrt{\frac{1}{16xy} \cdot xy} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}} = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{4} = \frac{17}{4}.$$

$$\Rightarrow P \geq 2\sqrt{\frac{17}{4}} = \sqrt{17}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \sqrt{17} \text{ xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x = y \\ x + y = 1 \\ xy = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$