

Câu 1 (4,0 điểm). Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{3-11\sqrt{x}}{9-x}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$ (với $x \geq 0; x \neq 9$).

a) Tính giá trị của B tại $x = \frac{2}{5(45-\sqrt{2021})} + \frac{2}{5(45+\sqrt{2021})}$.

b) Rút gọn A .

c) Tìm tất cả các số nguyên x để $P = A.B$ nhận giá trị nguyên.

Câu 2 (4,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = (2m+1)x - 2m$ và parabol $(P): y = x^2$ (m là tham số).

a) Tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P) khi $m = 2$.

b) Tìm m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho biểu thức $E = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 3 (4,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - 2xy = 8x^2 - 6x + 1 \\ y^2 = x^3 + 8x^2 - x + 1 \end{cases}$.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + 2y^2 + 2xy + 3y - 4 = 0$.

Câu 4 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC có góc A tù. Vẽ đường tròn (O) đường kính AB và đường tròn (O') đường kính AC . Đường thẳng AB cắt đường tròn (O') tại điểm thứ hai là D , đường thẳng AC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E .

a) Chứng minh bốn điểm B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi F là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (O) và (O') (F khác A). Chứng minh ba điểm B, F, C thẳng hàng và FA là phân giác của góc EFD .

c) Gọi H là giao điểm của AB và EF . Chứng minh $BH.AD = AH.BD$.

Câu 5 (2,0 điểm). Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức $P = \frac{b^2c^2}{a(b^2+c^2)} + \frac{c^2a^2}{b(c^2+a^2)} + \frac{a^2b^2}{c(a^2+b^2)}$.

-----Hết-----

Thí sinh không sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

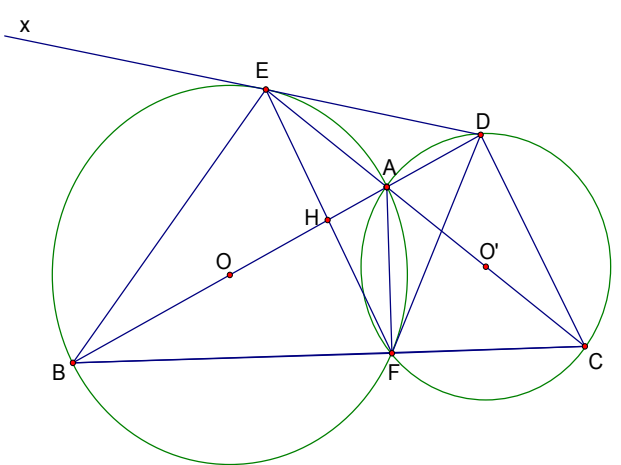
Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:

ĐỀ CHÍNH THỨC

(HD chấm có 04 trang)

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1	1.a	Ta có: $x = \frac{2}{5(45 - \sqrt{2021})} + \frac{2}{5(45 + \sqrt{2021})}$ $= \frac{2(45 + \sqrt{2021}) + 2(45 - \sqrt{2021})}{5(45 - \sqrt{2021})(45 + \sqrt{2021})} = \frac{90 + 2\sqrt{2021} + 90 - 2\sqrt{2021}}{5(2025 - 2021)}$ $= \frac{180}{20} = 9$	0,5
		Thay $x = 9$ vào biểu thức B ta được: $B = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{9} - 3}{\sqrt{9} + 1} = \frac{3 - 3}{3 + 1} = 0$	0,5
	1.b	$A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{3 - 11\sqrt{x}}{9 - x}$ $= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3) + (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 3) + 11\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)}$	0,5
		$= \frac{2x - 6\sqrt{x} + x + 3\sqrt{x} + \sqrt{x} + 3 + 11\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)}$	0,5
		$= \frac{3x + 9\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} \text{ với } x \geq 0, x \neq 9$	0,5
	1.c	Ta có: $P = A.B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} \cdot \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 1} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = \frac{3(\sqrt{x} + 1) - 3}{\sqrt{x} + 1} =$ $3 - \frac{3}{\sqrt{x} + 1}$	0,5
		$\Rightarrow P \text{ là số nguyên} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 1} \text{ là số nguyên} \Leftrightarrow 3 : (\sqrt{x} + 1)$	0,5
		Hay $(\sqrt{x} + 1) \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$ $\dots \Leftrightarrow x \in \{0; 4\}$	0,5
2	2.a	Khi $m = 2$ đường thẳng (d) có dạng: $y = 5x - 4$	0,25
		Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình: $x^2 = 5x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$	0,25
		Với $x = 1 \Rightarrow y = 1$; $x = 4 \Rightarrow y = 16$.	0,25

		Vậy tọa độ giao điểm của (d) và (P) là: $(1; 1); (4; 16)$.	0,25
		Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình: $x^2 = (2m+1)x - 2m \Leftrightarrow x^2 - (2m+1)x + 2m = 0$	0,25
		Tính được $\Delta = (2m-1)^2$	0,25
		* (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$	0,5
		* Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+1 \\ x_1 \cdot x_2 = 2m \end{cases}$	0,5
	2b	Do đó: $E = x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2 = (2m+1)^2 - 3 \cdot 2m = 4m^2 - 2m + 1$	0,5
		$= \left(2m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$, với mọi $m \in \mathbb{R}$.	0,5
		Min $E = \frac{3}{4}$ khi $m = \frac{1}{4}$	0,5
		a) $\begin{cases} y^2 - 2xy = 8x^2 - 6x + 1 & (1) \\ y^2 = x^3 + 8x^2 - x + 1 & (2) \end{cases}$	
		Từ phương trình (1) cộng vào 2 vế với x^2 , ta được: $y^2 - 2xy + x^2 = 9x^2 - 6x + 1$	0,5
		$\Leftrightarrow (x-y)^2 = (3x-1)^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 - (3x-1)^2 = 0$ $\Leftrightarrow (x-y-3x+1)(x-y+3x-1) = 0 \Leftrightarrow (1-2x-y)(4x-y-1) = 0$	0,5
	3a	$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x-y=0 \\ 4x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ y=4x-1 \end{cases}$ + Trường hợp 1: $y = 4x - 1$ thế vào phương trình (2) ta được: $(4x-1)^2 = x^3 + 8x^2 - x + 1 \Leftrightarrow 16x^2 - 8x + 1 = x^3 + 8x^2 - x + 1$ $\Leftrightarrow x^3 - 8x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=7 \end{cases}$ Ta tìm được nghiệm $(x; y)$ là $(0; -1); (1; 3); (7; 27)$	0,5
		+ Trường hợp 2: $y = 1 - 2x$ thế vào phương trình (2) ta được: $(1-2x)^2 = (x^3 + 8x^2 - x + 1)$	0,5

		$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = x^3 + 8x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$ Tìm được nghiệm $(x; y)$ là: $(0; 1); (-1; 3); (-3; 7)$ Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là: $S = \{(0; -1); (0; 1); (1; 3); (-1; 3); (7; 27); (-3; 7)\}$	
3	3b	Biến đổi phương trình: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2xy + y^2) + y^2 + 3y - 4 = 0$ $\Leftrightarrow (x + y)^2 + (y - 1)(y + 4) = 0$	0,5
		$\Leftrightarrow (y - 1)(y + 4) = -(x + y)^2 \leq 0$	0,5
		$\Rightarrow -4 \leq y \leq 1, \text{ vì } y \text{ nguyên nên } y \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1\}$	0,5
		Suy ra các cặp $(x; y)$ nguyên thỏa mãn phương trình là: $(4; -4); (-1; 1); (5; -3); (1; -3); (2; 0); (-2; 0)$	0,5
4	4a	Hình vẽ đúng: 	0,5
		Lập luận có $\widehat{AEB} = 90^\circ$	0,5
		Lập luận có $\widehat{ADC} = 90^\circ$	0,5
		Suy ra bốn điểm B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn đường kính BC .	0,5
	4b	Ta có $\widehat{AFB} = \widehat{AFC} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) suy ra $\widehat{AFB} + \widehat{AFC} = 180^\circ$ Suy ra ba điểm B, F, C thẳng hàng	0,5
		$\widehat{AFE} = \widehat{ABE}$ (cùng chắn $\widehat{AE}$) và $\widehat{AFD} = \widehat{ACD}$ (cùng chắn $\widehat{AD}$)	0,5
		Mà $\widehat{ECD} = \widehat{EBD}$ (cùng chắn $\widehat{DE}$ của tứ giác $BCDE$ nội tiếp)	0,5
		Suy ra: $\widehat{AFE} = \widehat{AFD} \Rightarrow FA$ là phân giác của góc $\widehat{EFD}$	0,5
	4c	C/m được EA là phân giác của tam giác DHE và suy ra $\frac{AH}{AD} = \frac{EH}{ED}$	0,5

		(1)	
		Xét tam giác HED có EA là phân giác trong của tam giác. Mặt khác $BE \perp EA$ nên BE là phân giác ngoài của tam giác HED	0,5
		EB là phân giác ngoài của tam giác DHE suy ra $\frac{BH}{BD} = \frac{EH}{ED}$ (2)	0,5
		Từ (1), (2) ta có: $\frac{AH}{AD} = \frac{BH}{BD} \Leftrightarrow AH \cdot BD = BH \cdot AD$	0,5
5	5	Ta có: $P = \frac{1}{a\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}\right)} + \frac{1}{b\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)} + \frac{1}{c\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)}$	0,5
		Đặt $\frac{1}{a} = x; \frac{1}{b} = y; \frac{1}{c} = z$ thì $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và $0 < x, y, z < 1$.	0,5
		$P = \frac{x}{y^2 + z^2} + \frac{y}{z^2 + x^2} + \frac{z}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x(1-x^2)} + \frac{y^2}{y(1-y^2)} + \frac{z^2}{z(1-z^2)}$	
		Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có:	0,5
		$x^2(1-x^2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2x^2(1-x^2)(1-x^2) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2x^2 + 1 - x^2 + 1 - x^2}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}$ $\Rightarrow x(1-x^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x(1-x^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2 \quad (1)$	
		Tương tự: $\frac{y^2}{y(1-y^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} y^2 \quad (2); \quad \frac{z^2}{z(1-z^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} z^2 \quad (3)$	
		Từ (1); (2); (3) ta có $P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$	0,5
		Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ hay $a = b = c = \sqrt{3}$	
		Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{3}$	

(Lưu ý: Học sinh làm theo đáp án khác và đúng thì giáo viên vẫn chấm điểm đối đa)

-----Hết-----