

Bài 1 (5,0 điểm)

Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $(1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 2022^{2022})(8^2 - 576 : 3^2)$

b) $\frac{2^6 \cdot 18 + 2^7}{2^6 \cdot 5^2 - 2^6 \cdot 3}$

c) $\left(\frac{171717}{151515} + \frac{171717}{353535} + \frac{171717}{636363} + \frac{171717}{999999} \right) : \frac{8}{11}$

d) $\frac{32}{3 \cdot 7} + \frac{6}{7 \cdot 41} + \frac{9}{41 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 51} + \frac{19}{51 \cdot 14}$

Bài 2 (5,0 điểm)

1) Tìm x thỏa mãn:

a) $(7x - 11)^3 = 2^5 \cdot 5^2 + 2 \cdot 10^2$

b) $2 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^{x+1} = 153$

2) Một số tự nhiên chia hết cho 2, chia cho 3 dư 1, chia cho 337 dư 335. Hỏi số tự nhiên đó chia cho 2022 dư bao nhiêu?

Bài 3 (2,0 điểm)

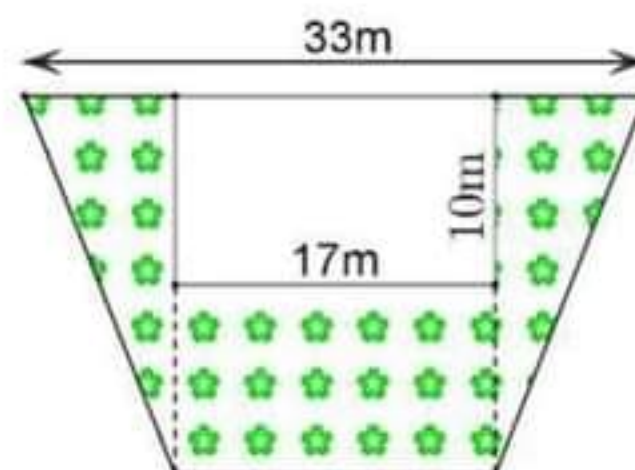
Kỳ thi học sinh giỏi huyện Quế Võ đợt 2 năm học 2021-2022 có 500 học sinh tham gia thuộc các khối 6, 7, 8. Biết rằng số học khối 6 có 30% tổng số học sinh tham dự và $\frac{10}{17}$ số học sinh khối 7

bằng $\frac{5}{9}$ số học sinh khối 8. Hỏi mỗi khối có bao nhiêu học sinh dự thi?

Bài 4 (6,0 điểm)

1) Cho ba điểm A, O, B sao cho $OA = 2\text{cm}$, $OB = 3\text{cm}$ và $AB = 5\text{cm}$. Lấy điểm M nằm trên đường thẳng AB sao cho $OM = 1\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .

2) Một khu vườn hình thang có kích thước như hình vẽ, bên trong khu vườn người ta đào một ao thả cá hình chữ nhật có kích thước 17m và 10m. Phần diện tích còn lại dùng để trồng rau. Biết mỗi túi hạt giống rau vừa đủ gieo trên diện tích 33m^2 . Hỏi cần bao nhiêu túi hạt giống để gieo hết phần diện tích đất còn lại đó?



3) Cho 15 điểm trong đó có 5 điểm thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Bài 5 (2,0 điểm)

1) Chứng tỏ rằng phân số $A = \frac{2^{2021} + 3^{2021}}{2^{2022} + 3^{2022}}$ là phân số tối giản.

2) Cho ba số nguyên tố lớn hơn 3, trong đó số sau lớn hơn số trước là d đơn vị. Chứng minh d chia hết cho 6.

----- Đề thi gồm có 01 trang -----

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Thí sinh không được sử dụng máy tính, tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1 (5,0 điểm)

Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $(1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 2022^{2022})(8^2 - 576 : 3^2)$

b) $\frac{2^6 \cdot 18 + 2^7}{2^6 \cdot 5^2 - 2^6 \cdot 3}$

c) $\left(\frac{171717}{151515} + \frac{171717}{353535} + \frac{171717}{636363} + \frac{171717}{999999}\right) : \frac{8}{11}$

d) $\frac{32}{3 \cdot 7} + \frac{6}{7 \cdot 41} + \frac{9}{41 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 51} + \frac{19}{51 \cdot 14}$

Lời giải

a) Do $8^2 - 576 : 3^2 = 64 - 576 : 9 = 64 - 64 = 0$ nên $(1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 2022^{2022})(8^2 - 576 : 3^2) = 0$.

b) $\frac{2^6 \cdot 18 + 2^7}{2^6 \cdot 5^2 - 2^6 \cdot 3} = \frac{2^6 \cdot 2 \cdot 9 + 2^7}{2^6 \cdot 25 - 2^6 \cdot 3} = \frac{2^7 \cdot 9 + 2^7}{2^6 \cdot (25 - 3)} = \frac{2^7 \cdot (9 + 1)}{2^6 \cdot 22} = \frac{2 \cdot 10}{22} = \frac{10}{11}$.

c) $\left(\frac{171717}{151515} + \frac{171717}{353535} + \frac{171717}{636363} + \frac{171717}{999999}\right) : \frac{8}{11}$
 $= \left(\frac{17 \cdot 10101}{15 \cdot 10101} + \frac{17 \cdot 10101}{35 \cdot 10101} + \frac{17 \cdot 10101}{63 \cdot 10101} + \frac{17 \cdot 10101}{99 \cdot 10101}\right) \cdot \frac{11}{8}$
 $= 17 \cdot \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99}\right) \cdot \frac{11}{8} = 17 \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11}\right) \cdot \frac{11}{8}$
 $= \frac{17}{2} \cdot \left(\frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \frac{2}{9 \cdot 11}\right) \cdot \frac{11}{8} = \frac{17}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) \cdot \frac{11}{8}$
 $= \frac{17}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{11}\right) \cdot \frac{11}{8} = \frac{17}{2} \cdot \frac{8}{3 \cdot 11} \cdot \frac{11}{8} = \frac{17}{2 \cdot 3} = \frac{17}{6}$.

d) $\frac{32}{3 \cdot 7} + \frac{6}{7 \cdot 41} + \frac{9}{41 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 51} + \frac{19}{51 \cdot 14} = 5 \cdot \left(\frac{32}{3 \cdot 35} + \frac{6}{35 \cdot 41} + \frac{9}{41 \cdot 50} + \frac{1}{50 \cdot 51} + \frac{19}{51 \cdot 70}\right)$
 $= 5 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{35} + \frac{1}{35} - \frac{1}{41} + \frac{1}{41} - \frac{1}{50} + \frac{1}{50} - \frac{1}{51} + \frac{1}{51} - \frac{1}{70}\right) = 5 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{70}\right) = 5 \cdot \frac{70 - 3}{3 \cdot 70} = 5 \cdot \frac{67}{3 \cdot 5 \cdot 14} = \frac{67}{42}$.

Bài 2 (5,0 điểm)

1) Tìm x thỏa mãn:

a) $(7x - 11)^3 = 2^5 \cdot 5^2 + 2 \cdot 10^2$

b) $2 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^{x+1} = 153$

2) Một số tự nhiên chia hết cho 2, chia cho 3 dư 1, chia cho 337 dư 335. Hỏi số tự nhiên đó chia cho 2022 dư bao nhiêu?

Lời giải

1) Tìm x :

a) $(7x - 11)^3 = 2^5 \cdot 5^2 + 2 \cdot 10^2 \Rightarrow (7x - 11)^3 = 2^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 10^2 \Rightarrow (7x - 11)^3 = 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2$
 $\Rightarrow (7x - 11)^3 = 10^2 \cdot (8 + 2) \Rightarrow (7x - 11)^3 = 10^3 \Rightarrow 7x - 11 = 10 \Rightarrow 7x = 21 \Rightarrow x = 3$.

Vậy $x = 3$.

b) $2 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^{x+1} = 153 \Rightarrow 2 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^x \cdot 3 = 153 \Rightarrow 3^x \cdot (2 + 15) = 153 \Rightarrow 3^x \cdot 17 = 153$
 $\Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$.

Vậy $x = 2$.

2) Gọi số tự nhiên phải tìm là a ($a \in \mathbb{N}^*$).

Vì a chia cho 3 dư 1, chia cho 337 dư 335 $\Rightarrow a + 2$ chia hết cho cả 3 và 337

$\Rightarrow a + 2$ là bội chung lớn hơn 0 của 3 và 337.

$$\text{Do } (3; 337) = 1 \Rightarrow \text{BCNN}(3; 337) = 3 \cdot 337 = 1011$$

$$\Rightarrow \text{BC}(3; 337) = \text{B}(1011) = \{0; 1011; 2022; 3033; 4044; 5055; 6066; \dots\}$$

$$\Rightarrow a + 2 \in \{1011; 2022; 3033; 4044; 5055; 6066; \dots\}$$

$$\text{Mà } a \text{ chia hết cho } 2 \Rightarrow a + 2 \text{ chẵn} \Rightarrow a + 2 \in \{2022; 4044; 6066; \dots\}$$

$$\Rightarrow a + 2 \text{ chia hết cho } 2022. \text{ Vậy } a \text{ chia cho } 2022 \text{ dư } 2020.$$

Bài 3 (2,0 điểm)

Kỳ thi học sinh giỏi huyện Quế Võ đợt 2 năm học 2021-2022 có 500 học sinh tham gia thuộc các khối 6, 7, 8. Biết rằng số học sinh khối 6 có 30% tổng số học sinh tham dự và $\frac{10}{17}$ số học sinh khối 7 bằng $\frac{5}{9}$ số học sinh khối 8. Hỏi mỗi khối có bao nhiêu học sinh dự thi?

Lời giải

Số học sinh khối 6 tham gia dự thi là $500 \cdot 30\% = 150$ (học sinh).

Tổng số học sinh khối 7, 8 dự thi là $500 - 150 = 350$ (học sinh).

Gọi số học sinh khối 7 dự thi là a (với $a \in \mathbb{N}^*$).

Ta có $\frac{10}{17}a$ bằng $\frac{5}{9}$ số học sinh khối 8 nên số học sinh khối 8 là $\frac{10}{17}a : \frac{5}{9} = \frac{18}{17}a$ (học sinh).

$$\text{Suy ra } a + \frac{18}{17}a = 350 \Rightarrow a \cdot \left(1 + \frac{18}{17}\right) = 350 \Rightarrow a \cdot \frac{35}{17} = 350 \Rightarrow a = 170.$$

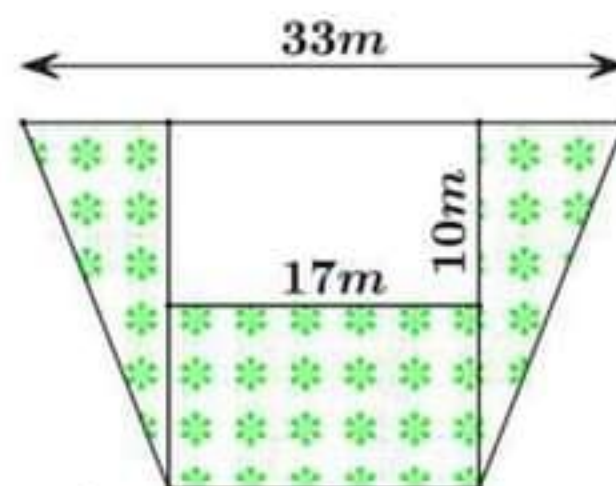
Số học sinh khối 8 dự thi là $350 - 170 = 180$ (học sinh).

Vậy khối 6 có 150 học sinh, khối 7 có 170 học sinh, khối 8 có 180 học sinh.

Bài 4 (6,0 điểm)

1) Cho ba điểm A, O, B sao cho $OA = 2\text{cm}$, $OB = 3\text{cm}$ và $AB = 5\text{cm}$. Lấy điểm M nằm trên đường thẳng AB sao cho $OM = 1\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .

2) Một khu vườn hình thang có kích thước như hình vẽ, bên trong khu vườn người ta đào một ao thả cá hình chữ nhật có kích thước 17m và 10m. Phần diện tích còn lại dùng để trồng rau. Biết mỗi túi hạt giống rau vừa đủ gieo trên diện tích 33m^2 . Hỏi cần bao nhiêu túi hạt giống để gieo hết phần diện tích đất còn lại đó?



3) Cho 15 điểm trong đó có 5 điểm thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Hỏi vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Lời giải

1) Vì $2 + 3 = 5 \Rightarrow OA + OB = AB \Rightarrow$ ba điểm A, O, B thẳng hàng và O nằm giữa A và B .

• Trường hợp 1: M thuộc đoạn OA :



Do M nằm giữa A và $O \Rightarrow AM + MO = OA \Rightarrow AM = OA - OM = 2 - 1 = 1\text{cm}$.

• Trường hợp 2: M thuộc đoạn OB :



Do O nằm giữa A và $M \Rightarrow AM = OA + OM = 2 + 1 = 3\text{cm}$.

2) Diện tích mảnh đất hình thang là $\frac{(17 + 33) \cdot 20}{2} = 50 \cdot 10 = 500(\text{m}^2)$.

Diện tích ao cá hình chữ nhật là $17 \cdot 10 = 170(\text{m}^2)$.

Diện tích phần đất còn lại để gieo hạt là $500 - 170 = 330(\text{m}^2)$.

Vậy số túi hạt giống cần để gieo hết phần đất còn lại là $330 : 33 = 10$ túi.

3) Có 1 đường thẳng d đi qua 5 điểm thẳng hàng.
Số điểm không nằm trên đường thẳng d là $15 - 5 = 10$ điểm.

• Trường hợp 1:

Không xét 5 điểm nằm trên đường thẳng d thì vẽ được tất cả $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ đường thẳng.

• Trường hợp 2: Xét các đường thẳng đi qua 1 điểm của đường thẳng d :

Qua mỗi đường thẳng d vẽ được 10 đường thẳng không trùng với d nên có $5 \cdot 10 = 50$ đường thẳng.

Vậy vẽ được tất cả $1 + 45 + 50 = 96$ đường thẳng.

Bài 5 (2,0 điểm)

1) Chứng tỏ rằng phân số $A = \frac{2^{2021} + 3^{2021}}{2^{2022} + 3^{2022}}$ là phân số tối giản.

2) Cho ba số nguyên tố lớn hơn 3, trong đó số sau lớn hơn số trước là d đơn vị. Chứng minh d chia hết cho 6.

Lời giải

$$1) \text{ Gọi } d = (2^{2021} + 3^{2021}; 2^{2022} + 3^{2022}) \Rightarrow \begin{cases} d \setminus 2^{2021} + 3^{2021} \\ d \setminus 2^{2022} + 3^{2022} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \setminus 3(2^{2021} + 3^{2021}) \\ d \setminus 2^{2022} + 3^{2022} \end{cases}$$

$$\Rightarrow d \setminus 3(2^{2021} + 3^{2021}) - (2^{2022} + 3^{2022}) \Rightarrow d \setminus 3 \cdot 2^{2021} + 3^{2022} - 2^{2022} - 3^{2022}$$

$$\Rightarrow d \setminus 3 \cdot 2^{2021} - 2^{2022} \Rightarrow d \setminus 2^{2021} \cdot (3 - 2) \Rightarrow d \setminus 2^{2021} \quad (1).$$

$$\text{Tương tự: } \Rightarrow \begin{cases} d \setminus 2^{2021} + 3^{2021} \\ d \setminus 2^{2022} + 3^{2022} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \setminus 2(2^{2021} + 3^{2021}) \\ d \setminus 2^{2022} + 3^{2022} \end{cases}$$

$$\Rightarrow d \setminus (2^{2022} + 3^{2022}) - 2(2^{2021} + 3^{2021}) \Rightarrow d \setminus 2^{2022} + 3^{2022} - 2^{2022} - 2 \cdot 3^{2021}$$

$$\Rightarrow d \setminus 3^{2022} - 2 \cdot 3^{2021} \Rightarrow d \setminus 3^{2021} \cdot (3 - 2) \Rightarrow d \setminus 3^{2021} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \begin{cases} d \setminus 2^{2021} \\ d \setminus 3^{2021} \end{cases}, \text{ mà } 2^{2021} \text{ và } 3^{2021} \text{ là hai số nguyên tố cùng nhau} \Rightarrow d = 1.$$

Vậy phân số $A = \frac{2^{2021} + 3^{2021}}{2^{2022} + 3^{2022}}$ là phân số tối giản.

2) Gọi ba số nguyên tố đã cho là p ; $p + d$; $p + 2d$.

Để chứng minh d chia hết cho 6 ta phải chứng minh d chia hết cho cả 2 và 3.

a) Chứng minh d chia hết cho 2:

Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ, mà $p + d$ là số nguyên tố $\Rightarrow d$ là số chẵn $\Rightarrow d : 2$.

b) Chứng minh d chia hết cho 3:

Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $p = 3q + 1$ hoặc $p = 3q + 2$ (với $q \in \mathbb{N}^*$)

• Trường hợp 1: $p = 3q + 1$

+) Nếu d chia 3 dư 1 thì $2d$ chia 3 dư 2 $\Rightarrow p + 2d$ chia hết cho 3

Mà $p + 2d > 3 \Rightarrow p + 2d$ là hợp số $\rightarrow$ loại.

+) Nếu d chia 3 dư 2 $\Rightarrow p + d$ chia hết cho 3

Mà $p + d > 3 \Rightarrow p + d$ là hợp số $\rightarrow$ loại.

Suy ra d phải chia hết cho 3.

• Trường hợp 2: $p = 3q + 2$

+) Nếu d chia 3 dư 1 $\Rightarrow p + d$ chia hết cho 3

Mà $p + d > 3 \Rightarrow p + d$ là hợp số $\rightarrow$ loại.

+) Nếu d chia 3 dư 2 thì $2d$ chia 3 dư 1 $\Rightarrow p + 2d$ chia hết cho 3

Mà $p + 2d > 3 \Rightarrow p + 2d$ là hợp số $\rightarrow$ loại.

Suy ra d phải chia hết cho 3.

Do đó, d luôn chia hết cho 3. Vậy bài toán được chứng minh.

-----HẾT-----