

Câu 1: (2,0 điểm)

Cho biểu thức : $A = \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$ với $x \neq 0, x \neq \pm 2$.

a) Rút gọn A .

b) Tìm x để $A = |A|$.

Câu 2: (2,0 điểm)

a) Giải phương trình : $\frac{3}{x^2 + 5x + 4} + \frac{2}{x^2 + 10x + 24} = \frac{4}{3} + \frac{9}{x^2 + 3x - 18}$

b) Đa thức $P(x)$ bậc 4 có hệ số bậc cao nhất là 1. Biết $P(1) = 0$; $P(3) = 0$; $P(5) = 0$. Tính giá trị của biểu thức: $Q = P(-2) + 7P(6)$.

Câu 3: (2,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $(y + 2)x^3 - y^2 - 2y - 1 = 0$

b) Cho 3 số nguyên tố $x < y < z$ liên tiếp thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2$ là một số nguyên tố. Chứng minh rằng $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2$ cũng là một số nguyên tố.

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho hình thoi ABCD cạnh a có $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O, E thuộc tia BC sao cho $BE = \frac{4}{3}BC$, AE cắt CD tại F. Trên hai đoạn AB và AD lần lượt lấy hai điểm G và H sao cho CG song song với FH.

a) Tính diện tích hình thoi ABCD theo a .

b) Chứng minh rằng : $4BG.DH = 3a^2$

c) Tính số đo góc GOH.

Câu 5: (1,0 điểm)

Với a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} < 2$

----- HẾT -----

Câu	Phần	Nội dung đáp án	Điểm
Câu 1	a	a) $A = \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$	
		$A = \left(\frac{x}{(x - 2)(x + 2)} - \frac{2}{x - 2} + \frac{1}{x + 2} \right) : \frac{x^2 - 4 + 10 - x^2}{x + 2}$	0,25
		$A = \frac{-6}{(x - 2)(x + 2)} \cdot \frac{x + 2}{6}$	0,25
		$A = \frac{1}{2 - x}$	0,25
		Vậy $A = \frac{1}{2 - x}$ với $x \neq 0, x \neq \pm 2$	0,25
	b	$A = A \Leftrightarrow A \geq 0$	0,25
		$\Leftrightarrow \frac{1}{2 - x} \geq 0 \Leftrightarrow 2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$	0,5
		Kết hợp với ĐKXD $x \neq 0, x \neq \pm 2$ ta có $x < 2; x \neq 0, x \neq -2$	0,25
Câu 2	a	ĐKXD: $x \neq -1; -4; -6; 3$.	
		$\frac{3}{x^2 + 5x + 4} + \frac{2}{x^2 + 10x + 24} = \frac{4}{3} + \frac{9}{x^2 + 3x - 18}$	0,25
		$\Leftrightarrow \frac{3}{(x + 1)(x + 4)} + \frac{2}{(x + 4)(x + 6)} = \frac{4}{3} + \frac{9}{(x - 3)(x + 6)}$	
		$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 4} \right) + \left(\frac{1}{x + 4} - \frac{1}{x + 6} \right) = \frac{4}{3} + \left(\frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x + 6} \right)$	0,25
		$\Leftrightarrow \frac{1}{x + 1} = \frac{4}{3} + \frac{1}{x - 3}$	
	b	$\Leftrightarrow \frac{3(x - 3)}{3(x + 1)(x - 3)} = \frac{4(x + 1)(x - 3)}{3(x + 1)(x - 3)} + \frac{3(x + 1)}{3(x + 1)(x - 3)}$	
		$\Rightarrow 4x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow 4x(x - 2) = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$ (thỏa mãn điều kiện).	
		Vậy tập nghiệm của phương trình: $S = \{0; 2\}$.	0,25
Câu 3	a	b) Ta có: $P(x)$: $(x - 1), (x - 3), (x - 5)$ mà $P(x)$ bậc 4 có hệ số bậc cao nhất là 1 nên $P(x)$ có dạng: $P(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)(x + a)$	0,25
		Khi đó: $P(-2) + 7P(6) = (-3).(-5).(-7).(-2 + a) + 7.5.3.1.(6 + a)$	0,25
		$= -105.(-2 + a) + 105.(6 + a)$	0,25
		$= 105.(2 - a + 6 + a) = 840$	0,25
		Nếu $y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$ lúc đó bài toán có dạng $0x^3 - 1 = 0$ (KTM).	
		Nếu $y \neq -2$ thì ta có $x^3 = \frac{y^2 + 2y + 1}{y + 2} = y + \frac{1}{y + 2}$	0,25

		Vì x, y nguyên nên $\frac{1}{y+2}$ nguyên $\Rightarrow y+2 \in U(1) = \{-1; 1\}$. Với $y+2 = -1 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow x^3 = -4$ (loại). Với $y+2 = 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Vậy số nguyên x, y thỏa mãn đề bài là : $x = 0, y = -1$.	0,25
		Nếu $x; y; z$ đều không chia hết 3 thì $x^2; y^2; z^2$ chia cho 3 đều dư 1 $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2$ chia hết cho 3 mà $x^2 + y^2 + z^2 > 3 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2$ là hợp số. $\Rightarrow$ Trong 3 số $x; y; z$ có ít nhất 1 số chia hết cho 3 mà $x; y; z$ là số nguyên tố $\Rightarrow$ có ít nhất một số là 3 và do $x < y < z$ là 3 số nguyên tố liên tiếp $\Rightarrow (x; y; z) = (2; 3; 5); (3; 5; 7)$ b + Xét $(x; y; z) = (2; 3; 5)$ $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 38 \notin P$ (Loại) + Xét $(x; y; z) = (3; 5; 7)$ $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 83$ là số nguyên tố (t/m) $\Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 = 29$ là số nguyên tố.	0,25 0,25 0,25
	Hình vẽ		0,25
Câu 4	a	+) Kẻ $AI \perp BC (I \in BC)$. Tính được $BI = CI = \frac{a}{2}$ +) Áp dụng định lí Pi-ta-go tính $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ +) Tính diện tích hình thoi bằng $AI \cdot BC = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ <i>Chú ý : HS có thể tính theo công thức diện tích hình thoi.</i>	0,25 0,25 0,25
	b	+) Chứng minh $\triangle BCG \sim \triangle DHF \Rightarrow \frac{BC}{DH} = \frac{BG}{DF} \Rightarrow BC \cdot DF = DH \cdot BG$ +) Theo định lý Ta-lét tính được : $\frac{BC}{BE} = \frac{AF}{AE} = \frac{DF}{DC} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{DF}{CD}$ +) $\Rightarrow DF = \frac{3}{4} DC = \frac{3}{4} BC \Rightarrow BG \cdot DH = \frac{3}{4} a^2$ +) $\Rightarrow 4BG \cdot DH = 3a^2$	0,25 0,25 0,25 0,25
	c	+) Theo định lý Py-ta-go tính được $BO^2 = BC^2 - CO^2 = \frac{3}{4} BC^2 = \frac{3}{4} a^2$	

		Mà $BG.DH = \frac{3}{4}a^2$ nên $BG.DH = BO^2 = BO.DO$ +) $\Rightarrow \frac{BG}{DO} = \frac{BO}{DH}$ kết hợp với $\widehat{GBO} = \widehat{HDO} = 30^\circ$ $\Rightarrow \Delta BGO$ đồng dạng ΔDOH (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{GOB} = \widehat{DHO}$ +) Có $\widehat{GOB} + \widehat{GOH} + \widehat{HOD} = 180^\circ$, vì $\widehat{GOB} = \widehat{DHO}$ (cmt) Nên $\widehat{DHO} + \widehat{GOH} + \widehat{HOD} = 180^\circ$. Do $\widehat{DHO} + \widehat{HOD} = 150^\circ$ (vì $\widehat{DOH} = 30^\circ$) +) Suy ra $\widehat{GOH} = 30^\circ$	0,25 0,25 0,25 0,25
Câu 5		Với a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác ta chứng minh được : $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) > 0$ Ta có : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ $= \frac{a(a+c)(a+b) + b(b+a)(b+c) + c(c+a)(c+b) + 3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ $= \frac{a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)}{ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc}$ $= \frac{a^3 + b^3 + c^3 + 4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} + 1$ Theo kết quả trên : $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) > 0$ $\Leftrightarrow ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) > 2abc + a^3 + b^3 + c^3$ $\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) > 4abc + a^3 + b^3 + c^3$ $\Rightarrow \frac{a^3 + b^3 + c^3 + 4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} + 1 < 2$	0,25 0,25 0,25 0,25

Chú ý : Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.