

Câu 1. (5 điểm)

1) Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $x^2 - 5xy + 4y^2 + x - y$.

b) $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$.

2) Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 2023$. Chứng minh rằng $A = (a^2 + 2023)(b^2 + 2023)(c^2 + 2023)$ là số chính phương.

Câu 2. (5 điểm)

1) Tìm x biết: a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

b) $(x^2 - 4)(x^2 - 10) = 72$.

2) Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $xy^2 + 2xy + x - 3y = 0$.

Câu 3. (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB > AC$) có $\hat{B} = 45^\circ$, đường cao AH và BK cắt nhau tại D . Gọi M là trung điểm của AB , P là điểm đối xứng với H qua M .

a) Chứng minh $AHBP$ là hình vuông.

b) Chứng minh $HP = 2MK$ và $\triangle BHD = \triangle AHC$.

c) Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AH tại D , qua C kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại C , hai đường thẳng này cắt nhau tại Q . Chứng minh P, K, Q thẳng hàng.

Câu 4. (2,0 điểm)

1) Tìm đa thức dư khi chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $(x-1)(x^2+1)$ biết đa thức $P(x)$ chia cho $x-1$ được dư là 4 và khi chia cho x^2+1 được dư là $3x+5$.

2) Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = (x^2+4y)(y^2+4x)+8xy$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Lấy 2020 điểm thuộc miền trong của một tứ giác để cùng với 4 đỉnh ta được 2024 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Biết diện tích của tứ giác ban đầu là 1 cm^2 . Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có 3 đỉnh lấy từ

2024 điểm đã cho có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4042}\text{ cm}^2$.

-----Hết-----

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HSG CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn : Toán 8

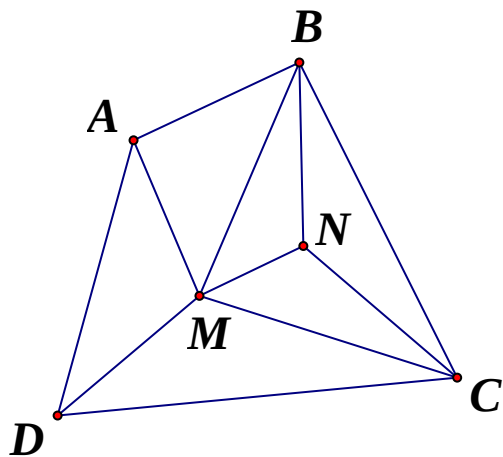
Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1	Câu 1. (5 điểm) 1) Phân tích đa thức thành nhân tử a) $x^2 - 5xy + 4y^2 + x - y$. b) $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$. 2) Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 2023$. Chứng minh rằng nếu $A = (a^2 + 2023)(b^2 + 2023)(c^2 + 2023)$ là số chính phương.	5.0
1a	$x^2 - 5xy + 4y^2 + x - y$ $= x^2 - xy - 4xy + 4y^2 + x - y$ $= x(x - y) - 4y(x - y) + (x - y)$ $= (x - y)(x - 4y + 1)$	0.5 0.5 0.5
1b	$x^3 - 9x^2 + 6x + 16$ $= x^3 - 8x^2 - x^2 + 8x - 2x + 16$ $= x^2(x - 8) - x(x - 8) - 2(x - 8)$ $= (x - 8)(x^2 - x - 2)$ $= (x - 8)(x^2 - 2x + x - 2)$ $= (x - 8)(x - 2)(x + 1)$	1.0 1.0
2	Ta có: $ab + bc + ca = 2023$ $\Rightarrow a^2 + 2023 = a^2 + ab + bc + ca = a(a + b) + c(b + a) = (a + c)(a + b)$ Chứng minh tương tự ta có: $b^2 + 2023 = (b + a)(b + c); c^2 + 2023 = (c + a)(c + b)$ Khi đó: $A = (a^2 + 2023)(b^2 + 2023)(c^2 + 2023)$ $= [(a + b)(b + c)(c + a)]^2$ Vì a, b, c là các số nguyên nên $a + b; b + c; c + a$ là các số nguyên Do vậy $[(a + b)(b + c)(c + a)]^2$ là số chính phương hay A là số chính	0.5 0.5

	phương vậy $A = (a^2 + 2023)(b^2 + 2023)(c^2 + 2023)$ là số chính phương với các số nguyên a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 2023$.	
Câu 2	Câu 2. (5 điểm) 1) Tìm x biết: a) $x^2 - 4x + 3 = 0$ b) $(x^2 - 4)(x^2 - 10) = 72$. 2) Tìm x, y nguyên thỏa mãn $xy^2 + 2xy + x - 3y = 0$.	5
1	a) $x^2 - 4x + 3 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - x - 3x + 3 = 0$ $\Leftrightarrow x(x - 1) - 3(x - 1) = 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$ Vậy $x \in \{1; 3\}$ b) $(x^2 - 4)(x^2 - 10) = 72$ Đặt $x^2 - 7 = y$. Khi đó ta có: $(y + 3)(y - 3) = 72$ $\Leftrightarrow y^2 - 9 = 72$ $\Leftrightarrow y^2 = 81$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 \\ y = -9 \end{cases}$ Với $y = 9 \Rightarrow x^2 - 7 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$ Với $y = -9 \Rightarrow x^2 - 7 = -9 \Leftrightarrow x^2 = -2$ (Vô lí vì $x^2 \geq 0$ với mọi x) Vậy $x \in \{-4; 4\}$.	0.75 0.5 0.25 0.5 0.5 0.5
2	$xy^2 + 2xy + x - 3y = 0$ $\Leftrightarrow x(y^2 + 2y + 1) - 3y = 0$ $\Leftrightarrow x(y + 1)^2 - 3y = 0$ $\Leftrightarrow x(y + 1)^2 - 3(y + 1) = -3$ $\Leftrightarrow (y + 1)(xy + x - 3) = -3$ Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y + 1 \in \mathbb{Z}; xy + x - 3 \in \mathbb{Z}$ mà $-3 = 1 \cdot (-3) = 3 \cdot (-1)$ Ta có bảng giá trị sau	0.5

	<table><tr><td>$y+1$</td><td>1</td><td>-3</td><td>-1</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>-4</td><td>-2</td><td>2</td></tr><tr><td>$xy+x-3$</td><td>-3</td><td>1</td><td>3</td><td>-1</td></tr><tr><td>x</td><td>0</td><td>$-\frac{4}{3}$</td><td>-6</td><td>$\frac{2}{3}$</td></tr><tr><td></td><td>Thỏa mãn</td><td>Loại</td><td>Thỏa mãn</td><td>Loại</td></tr></table> Vậy các cặp giá trị nguyên $(x ; y)$ cần tìm là: $(0;0);(-6;-2)$	$y+1$	1	-3	-1	3	y	0	-4	-2	2	$xy+x-3$	-3	1	3	-1	x	0	$-\frac{4}{3}$	-6	$\frac{2}{3}$		Thỏa mãn	Loại	Thỏa mãn	Loại	1
$y+1$	1	-3	-1	3																							
y	0	-4	-2	2																							
$xy+x-3$	-3	1	3	-1																							
x	0	$-\frac{4}{3}$	-6	$\frac{2}{3}$																							
	Thỏa mãn	Loại	Thỏa mãn	Loại																							
Câu 3 3	Câu 3. (7,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn ($AB > AC$) có $B = 45^\circ$. Kẻ đường cao AH và BK cắt nhau tại D. Gọi M là trung điểm của AB, P là điểm đối xứng với H qua M. a) Chứng minh $AHBP$ là hình vuông. b) Chứng minh $HP = 2MK$ và $\Delta BHD = \Delta AHC$ c) Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AH tại D, qua C kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại C, hai đường thẳng này cắt nhau tại Q. Chứng minh P, K, Q thẳng hàng.	7																									
3a	Chứng minh $AHBP$ là hình vuông Ta có P đối xứng với H qua M nên M là trung điểm của PH. Xét tứ giác $AHBP$ có M là trung điểm của AB và M là trung điểm của PH Suy ra $AHBP$ là hình bình hành Lại có $AHB = 90^\circ$ (do AH là đường cao của tam giác ABC) Do đó $AHBP$ là hình chữ nhật.	0.5 0.5 0.5																									

	Suy ra $PBH = 90^\circ$ mà $ABH = 45^\circ$ nên BA là phân giác của PBH Hình chữ nhật $AHBP$ có BA là phân giác của PBH nên $AHBP$ là hình vuông.	0.5
3b	Chứng minh $HP = 2MK$. Xét $\triangle ABK$ vuông tại K có KM là đường trung tuyến nên $KM = \frac{1}{2}AB$ Lại có $AHBP$ là hình vuông nên $PH = AB$ Do đó $KM = \frac{1}{2}PH \Rightarrow PH = 2KM$ Chứng minh $\triangle BHD = \triangle AHC$ Chứng minh $HBD = HAC$ (cùng phụ với ACB) Vì $AHBP$ là hình vuông nên $AH = HB$ Chứng minh $\triangle BHD = \triangle AHC$ (cạnh huyền – góc nhọn)	0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5
3c	Chứng minh P, K, Q thẳng hàng. Gọi O là giao điểm của DC, QH C/m $HDQC$ là hình vuông nên $DC = QH$ và O là trung điểm của DC, QH Ta có $\triangle DKC$ vuông tại K có KO là đường trung tuyến nên $KO = \frac{1}{2}DC$ Do đó $KO = \frac{1}{2}QH \Rightarrow \triangle KQH$ vuông tại K nên $HKQ = 90^\circ$ Chứng minh tương tự $HKP = 90^\circ$ Do đó $PKQ = 180^\circ$ Vậy P, K, Q thẳng hàng.	0.5 0.5 0.5 0.5
Câu 4	1) Tìm đa thức dư khi chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $(x-1)(x^2+1)$ biết đa thức $P(x)$ chia cho $x-1$ được dư là 4 và khi chia cho x^2+1 được dư là $3x+5$. 2) Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = (x^2+4y)(y^2+4x) + 8xy$.	2
4.1	1) Vì đa thức $(x-1)(x^2+1)$ có bậc là 3	

	$\Rightarrow P(x)$ chia cho đa thức $(x-1)(x^2+1)$ có thương là $Q(x)$ và đa thức dư có dạng là ax^2+bx+c $P(x) = (x-1)(x^2+1)Q(x) + ax^2 + bx + c$ $= (x-1)(x^2+1)Q(x) + a(x^2+1) + bx + c - a$ $= [(x-1)Q(x) + a](x^2+1) + bx + c - a$ Do đó $P(x)$ chia cho x^2+1 dư $bx+c-a$ Mà $P(x)$ chia x^2+1 dư $3x+5 \Rightarrow \begin{cases} b=3 \\ c-a=5 \end{cases} \quad (1)$ Lại có $P(x)$ chia $(x-1)$ dư $4 \Rightarrow P(1) = 4 \Rightarrow a+b+c = 4 \quad (2)$. Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a=-2 \\ b=3 \\ c=3 \end{cases}$	0.25 0.25 0.25 0.25
4.2	Ta có: $C = (x^2 + 4y)(y^2 + 4x) + 8xy$ $= x^2y^2 + 4x^3 + 4y^3 + 16xy + 8xy$ $= x^2y^2 + 4(x^3 + y^3) + 24xy$ Do $x+y=1 \Rightarrow x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 1 - 3xy$ thay vào C ta được: $C = x^2y^2 + 4(1 - 3xy) + 24xy$ $= x^2y^2 + 12xy + 4$ $= (x^2y^2 + 2xy \cdot 6 + 36) - 32$ $= (xy + 6)^2 - 32 \geq -32$ Dấu = xảy ra khi $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$	0.25 0.25 0.25 0.25
Câu 5	Lấy 2020 điểm thuộc miền trong của một tứ giác để cùng với 4 đỉnh ta được 2024 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Biết diện tích của tứ giác ban đầu là 1 cm^2. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có 3 đỉnh lấy từ 2024 điểm đã cho có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4042} \text{ cm}^2$.	1,0



Xét tứ giác ABCD có diện tích bằng 1 cm^2 .

Với điểm thứ nhất M, ta có 4 tam giác chung đỉnh M đôi một không có điểm trong chung.

0.25

Với điểm thứ hai N phải là điểm trong của một trong 4 tam giác trên.

Nối N với 3 đỉnh của tam giác đó, tạo nên 3 tam giác chung đỉnh N.

0.25

Tuy nhiên số tam giác đôi một không có điểm trong chung chỉ tăng thêm 2 vì mất đi một tam giác chứa điểm N. Số tam giác không có điểm trong chung lúc này là : $4+2$

Tương tự với $2020-2=2018$ điểm còn lại, cuối cùng số tam giác đôi một không có điểm trong chung là: $4+2+2018.2 = 4042$

0.25

Tổng diện tích của 4042 các tam giác đó bằng 1 cm^2 , nên tồn tại ít nhất một tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4042}\text{ cm}^2$

0.25

Lưu ý:

+ Các cách giải khác đáp án nếu đúng, phù hợp với chương trình THCS, ban giám khảo thống nhất cho điểm thành phần tương ứng.

+ Điểm toàn bài là tổng điểm của các câu không làm tròn.

_____HẾT_____