

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẮK LẮK
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
NĂM HỌC 2023-2024

Môn Thi: TOÁN - CHUYÊN

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1: (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2x - 3m - 2 = 0$ luôn có nghiệm
 2. Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) = 1$
- Tính giá trị của biểu thức $P = x_1x_2x_3x_4$

Câu 2: (2,0 điểm)

1. Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn $2f(x) + 3f(2 - x) = 5x^2 - 8x + 3(1)$ với mọi số thực x .
 - a. Trong đẳng thức (1), thay x bởi $2 - x$ và ghi ra kết quả
 - b. Giải phương trình $f(x) = -1$

$$2. \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 13x - 10 - (x - y + 2)\sqrt{x - y + 1} = 0 \\ (3x^2 + 18x - 2xy + 6y - y^2)\sqrt{x - y + 6} - 24x - 8y = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

1. Cho 9 hình vuông có độ dài các cạnh là 9 số nguyên dương liên tiếp. Gọi S là tổng diện tích của 9 hình vuông đã cho. Tồn tại hay không một hình vuông có cạnh là một số nguyên dương và có diện tích bằng S ?
2. Vẽ bất kì 17 đường tròn, mỗi đường tròn có độ dài đường kính là một số nguyên dương. Chứng minh rằng trong 17 đường tròn đó, ta luôn chọn được 5 đường tròn có tổng độ dài các đường kính là một số chia hết cho 5.

Câu 4: (3,0 điểm) Cho tứ giác $ABCD$ có $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, $BC = CD$. Gọi M là trung điểm của AB , đường tròn tâm C bán kính BC (ký hiệu là đường tròn (C)) cắt MD tại $E(E \neq D)$, H là giao điểm của AC và BD

1. Chứng minh rằng $\triangle MEB \sim \triangle MBD$ và tứ giác $BHEM$ là tứ giác nội tiếp.
2. Gọi F là giao điểm của đường thẳng AE và đường tròn $(C)(F \neq E)$. Chứng minh rằng $BC \perp DF$
3. Gọi I là giao điểm của đường thẳng BC và đường tròn $(C)(I \neq B)$, J là giao điểm của AI và DF . Tính tỉ số $\frac{DJ}{DF}$

Câu 5: (1,0 điểm) Cho các số thực x, y, z, t thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = xy + xz + xt + yz + yt + 3zt$

—————HẾT—————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 1: (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2x - 3m - 2 = 0$ luôn có nghiệm

2. Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = 1$

Tính giá trị của biểu thức $P = x_1x_2x_3x_4$

Lời giải

1. Điều kiện để phương trình $x^2 - 2x - 3m - 2 = 0$ luôn có nghiệm là $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 + 3m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$

Vậy với $m \geq -1$ thì phương trình đã cho luôn có nghiệm

$$2.(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = 1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) - 1 = 0$$

Vì phương trình có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 nên $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) - 1 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

So sánh hệ số tự do ở hai vế, ta được $x_1x_2x_3x_4 = 1.3.5.7 - 1 = 104$

Vậy $x_1x_2x_3x_4 = 104$

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn $2f(x) + 3f(2-x) = 5x^2 - 8x + 3(1)$ với mọi số thực x .

a. Trong đẳng thức (1), thay x bởi $2-x$ và ghi ra kết quả

b. Giải phương trình $f(x) = -1$

$$2. \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 13x - 10 - (x-y+2)\sqrt{x-y+1} = 0 \\ (3x^2 + 18x - 2xy + 6y - y^2)\sqrt{x-y+6} - 24x - 8y = 0 \end{cases}$$

Lời giải

1.

a. Trong (1), thay x bởi $2-x$, ta được

$$2f(2-x) + 3f(x) = 5(2-x)^2 - 8(2-x) + 3 = 5(4-4x+x^2) - 16 + 8x + 3 = 20 - 20x + 5x^2 - 16 + 8x + 3 = 5x^2 - 12x + 7(2)$$

$$b. \text{ Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} 2f(x) + 3f(2-x) = 5x^2 - 8x + 3 \\ 2f(2-x) + 3f(x) = 5x^2 - 12x + 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5f(x) + 5f(2-x) = 10x^2 - 20x + 10 \\ 2f(2-x) + 3f(x) = 5x^2 - 12x + 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5f(x) + 5f(2-x) = 10x^2 - 20x + 10 \\ 2f(2-x) + 3f(x) = 5x^2 - 12x + 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + f(2-x) = 2x^2 - 4x + 2 \\ 2f(2-x) + 3f(x) = 5x^2 - 12x + 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Ta có: $f(x) = -1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = -1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy phương trình $f(x) = -1$ có nghiệm duy nhất $x = 2$

$$2. \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 13x - 10 - (x - y + 2)\sqrt{x - y + 1} = 0 \\ (3x^2 + 18x - 2xy + 6y - y^2)\sqrt{x - y + 6} - 24x - 8y = 0 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x - y \geq -1$

$$(1) \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 4x + 5) = (x - y + 2)\sqrt{x - y + 1}$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^3 + (x - 2) = (\sqrt{x - y + 1})^3 + \sqrt{x - y + 1} \quad (3)$$

Đặt $a = x - 2, b = \sqrt{x - y + 1} (b \geq 0)$, khi đó (3) trở thành:

$$a^3 + a = b^3 + b \Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = 0$$

$$\text{Vì } a^2 + ab + b^2 + 1 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} + 1 > 0 \text{ nên } a = b$$

$$\text{Hay } x - 2 = \sqrt{x - y + 1} \quad (4)$$

$$(2) \Leftrightarrow (3x + y)(x - y + 6)\sqrt{x - y + 6} - 8(3x + y) = 0 \Leftrightarrow (3x + y)[(\sqrt{x - y + 6})^3 - 8] = 0$$

$$\text{TH1: } 3x + y = 0 \Leftrightarrow y = -3x$$

$$\text{Thay vào (4), ta có: } x - 2 = \sqrt{4x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 8x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 + \sqrt{13} \Rightarrow y = -12 - 3\sqrt{13} \text{ (tmđk)}$$

$$\text{TH2: } (\sqrt{x - y + 6})^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x - y + 6 = 4 \Leftrightarrow x - y = -2 < -1 \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy } (x, y) = (4 + \sqrt{13}, -12 - 3\sqrt{13})$$

Câu 3. (2,0 điểm)

1. Cho 9 hình vuông có độ dài các cạnh là 9 số nguyên dương liên tiếp. Gọi S là tổng diện tích của 9 hình vuông đã cho. Tồn tại hay không một hình vuông có cạnh là một số nguyên dương và có diện tích bằng S ?

2. Vẽ bất kì 17 đường tròn, mỗi đường tròn có độ dài đường kính là một số nguyên dương. Chứng minh rằng trong 17 đường tròn đó, ta luôn chọn được 5 đường tròn có tổng độ dài các đường kính là một số chia hết cho 5.

Lời giải

1. Gọi độ dài cạnh 9 hình vuông đó lần lượt là $a - 4, a - 3, a - 2, a - 1, a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4 (a \in \mathbb{N}^*, a > 4)$

$$\text{Khi đó } S = (a - 4)^2 + (a - 3)^2 + \dots + (a + 4)^2 = 9a^2 + 60$$

Giả sử tồn tại hình vuông thỏa đề. Gọi độ dài cạnh hình vuông đó là $k (k \in \mathbb{Z}^+)$

$$\text{Khi đó } k^2 = 9a^2 + 60. \text{ Do } 3 \mid 9a^2 + 60 \text{ nên } 3 \mid k^2 \text{ do đó } 3 \mid k \text{ suy ra } 9 \mid k^2 \text{ mà } 9 \mid 9a^2 \text{ nên } 9 \mid 60 \text{ (vô lí)}$$

Vậy không tồn tại hình vuông thỏa đề.

2. Về bất kì 17 đường tròn, mỗi đường tròn có độ dài đường kính là một số nguyên dương. Chứng minh rằng trong 17 đường tròn đó, ta luôn chọn được 5 đường tròn có tổng độ dài các đường kính là một số chia hết cho 5

Lời giải 1

Gọi độ dài đường kính 17 đường tròn đó lần lượt là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{17}$ ($a_1, a_2, a_3, \dots, a_{17} \in \mathbb{Z}^+$)

Yêu cầu bài toán trở thành: Chứng minh luôn chọn được 5 số từ 17 số trên có tổng chia hết cho 5

Chia 17 số trên cho 5, ta được 17 số dư, mà một số chia 5 có thể dư 0,1,2,3,4 nên theo nguyên lí Dirichlet, có ít nhất 4 số có cùng số dư, rõ ràng nếu nhiều hơn 4 thì tổng của 5 số sẽ chia hết cho 5, ta xét trường hợp có 4 số có cùng số dư, không mất tính tổng quát, ta giả sử là a_1, a_2, a_3, a_4 và gọi số dư đó là b_1 ($b_1 = \overline{0, 5}$)

Xét 13 số còn lại, nếu có ít nhất một số chia 5 dư b_1 thì tổng của số đó với 4 số chia 5 dư b_1 ở trên sẽ chia hết cho 5, ta xét trường hợp 13 số trên chia 5 có 4 số dư (là 5 số từ 0 tới 4 trừ đi b_1), theo Dirichlet thì sẽ có ít nhất 4 số có cùng số dư, ta giả sử là a_5, a_6, a_7, a_8 và số dư đó là b_2

Xét 9 số từ a_9 tới a_{17} , nếu có một số nào đó chia 5 dư b_2 thì ta có tổng 5 số gồm số đó với 4 số a_5, a_6, a_7, a_8 chia hết cho 5. Ta xét trường hợp 9 số này chia 5 có thể dư 3 số dư (từ 0 tới 4 trừ b_1 , trừ b_2)

Theo Dirichlet thì có 3 số sẽ có cùng số dư, ta giả sử là a_9, a_{10}, a_{11} và số dư đó là b_3

TH1: a_{12} chia 5 cũng dư b_3 . Khi đó xét 5 số từ a_{13} tới a_{17} nếu có 1 số nào đó chia 5 dư b_3 thì rõ ràng ta có 5 số $a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$ và số đó có tổng chia hết cho 5. Xét trường hợp 5 số a_{13} tới a_{17} chia 5 có thể dư 2 số dư (từ 0 tới 4 trừ b_1 , trừ b_2 , trừ b_3), theo Dirichlet sẽ có 3 số có cùng số dư, giả sử 2 số này là a_{13}, a_{14}, a_{15} và số dư đó là b_4 . Nếu trong 2 số a_{16} và a_{17} có một số dư khác b_4 , giả sử là a_{16} thì rõ ràng ta có 5 số là $a_1, a_5, a_9, a_{13}, a_{16}$ có 5 số dư đôi một khác nhau nên tổng của nó sẽ chia hết cho 5. Còn trong trường hợp 2 số có cùng số dư là b_4 thì rõ ràng 5 số $a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{17}$ có tổng chia hết cho 5

TH2: a_{12} chia 5 có số dư khác b_3 , ta gọi số dư đó là b_4 khi đó 5 số từ a_{13} tới a_{17} nếu có một số nào chia 5 khác b_4 , giả sử là a_{13} khi đó ta có 5 số là $a_1, a_5, a_9, a_{12}, a_{13}$ có 5 số dư đôi một khác nhau nên tổng của chúng sẽ chia hết cho 5. Còn trong trường hợp 5 số đó chia 5 có cùng số dư thì hiển nhiên tổng của chúng chia hết cho 5.

Vậy bài toán được chứng minh hoàn toàn

Lời giải 2, ngắn hơn

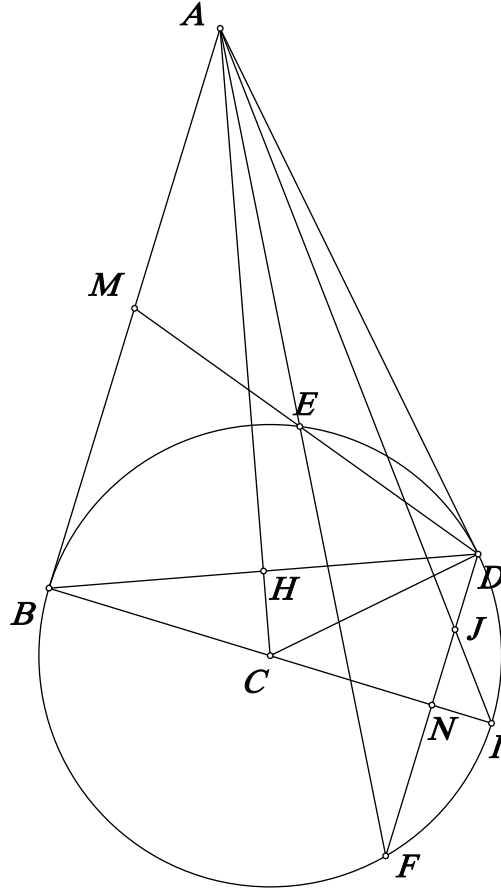
Gọi độ dài đường kính 17 đường tròn đó lần lượt là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{17}$ ($a_1, a_2, a_3, \dots, a_{17} \in \mathbb{Z}^+$)

Chia 17 số trên thành các tập A_i trong đó A_i là tập các số chia 5 dư i ($i = \overline{0, 4}$). Nếu có 1 tập nào đó chứa nhiều hơn 5 số thì tổng 5 số đó chia hết cho 5. Còn nếu mọi tập đều chứa ít hơn 5 phần tử, xét 4 tập bất kì, khi đó tổng số phần tử 4 tập này không quá 16 phần tử, do đó có ít nhất 1 phần tử thuộc vào tập còn lại, vậy 5 ta có 5 phần tử thuộc 5 tập khác nhau nên tổng 5 số này chia hết cho 5

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tứ giác $ABCD$ có $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, $BC = CD$. Gọi M là trung điểm của AB , đường tròn tâm C bán kính BC (ký hiệu là đường tròn (C)) cắt MD tại E ($E \neq D$), H là giao điểm của AC và BD

1. Chứng minh rằng $\triangle MEB \sim \triangle MBD$ và tứ giác $BHEM$ là tứ giác nội tiếp.
2. Gọi F là giao điểm của đường thẳng AE và đường tròn (C) ($F \neq E$). Chứng minh rằng $BC \perp DF$
3. Gọi I là giao điểm của đường thẳng BC và đường tròn (C) ($I \neq B$), J là giao điểm của AI và DF . Tính tỉ số $\frac{DJ}{DF}$

Lời giải



1. Vì $CB = CD$ nên $D \in (C)$

Vì $MB \perp BC$ nên MB là tiếp tuyến của (C)

Xét $\triangle MEB$ và $\triangle MBD$ có:

$\angle EMB$ là góc chung

$\angle MBE = \angle MDB$ (cùng chắn cung BE)

Do đó $\triangle MEB \sim \triangle MBD$ (g.g)

Ta có $\triangle ABC = \triangle ADC$ (cạnh huyền- cạnh góc vuông) nên $AB = AD$, do đó AC là đường trung trực của BD nên $AC \perp BD$

Vì $\triangle AHB$ vuông tại H , $MA = MB$ nên $MH = \frac{1}{2}AB = MB$ do đó $\triangle MBH$ cân tại M

Suy ra $\angle MEB = \angle EDB + \angle EBD = \angle EBD + \angle MBE = \angle MBH = \angle MHB$ suy ra tứ giác $MEHB$ nội tiếp

2. Vì $\triangle MEB \sim \triangle MDB$ nên $ME.MD = MB^2 = MA^2$ (Do M là trung điểm AB)

Từ đây suy ra $\frac{ME}{MA} = \frac{MA}{MD}$ nên $\triangle MEA \sim \triangle MAD$ (c.g.c)

Do đó $\angle MDA = \angle MAE$ (1)

Mặt khác, do B và D đối xứng với nhau qua AC nên AD cũng là tiếp tuyến của đường tròn (C) . Suy ra $\angle MDA = \angle EFD$ (cùng chắn cung ED) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle MAE = \angle EFD$ mà 2 góc này ở vị trí so le trong nên $AB \parallel DF$ mà $BC \perp AB$ nên $BC \perp DF$

3. Gọi N là giao điểm của BI và DF . Vì $BC \perp DF$ (câu 2) nên N là trung điểm DF

Vì $AC \parallel DI (\perp BD)$ nên $\angle ACB = \angle DIN$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle DNI$, ta có:

$$\angle ACB = \angle DIN$$

$$\angle ABC = \angle DNI = 90^\circ$$

Do đó $\triangle ABC \sim \triangle DNI$ suy ra $\frac{DN}{AB} = \frac{NI}{BC}$ (3)

Vì $NJ \parallel AB (\perp BI)$ nên theo hệ quả của định lý Thales, ta có:

$$\frac{NJ}{AB} = \frac{NI}{BI} \quad (4) \text{ Chia vế theo vế (3) và (4), ta có:}$$

$$\frac{DN}{NJ} = \frac{BI}{BC} = 2 \text{ suy ra } J \text{ là trung điểm } DN, \text{ kết hợp với } N \text{ là trung điểm } DF \text{ ta có được } \frac{DJ}{DF} = \frac{1}{4}$$

Câu 5 Cho các số thực x, y, z, t thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = xy + xz + xt + yz + yt + 3zt$

Lời giải

Quan sát biểu thức A , ta có nhận xét đây là 1 biểu thức có tính đối xứng giữa x và y , t và z . Mặt khác, để đánh giá A và tận dụng được giả thiết, ta nghĩ đến bất đẳng thức khá quen thuộc là $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$ (1), lưu ý rằng có thể chứng minh bất đẳng thức này bằng biến đổi tương đương nên nó sẽ thoả điều kiện x, y, z, t là các số thực

Vì biểu thức có tính đối xứng giữa x và y , t và z nên ta dự đoán dấu bằng sẽ xảy ra khi $x = y = az = at$ trong đó a là một số thực mà ta phải đi tìm.

Dựa vào bất đẳng thức (1), ta có các đánh giá sau để thoả mãn dấu bằng:

$$\begin{aligned} xy &\leq \frac{x^2 + y^2}{2} \quad (2) \\ axz &\leq \frac{x^2 + a^2 z^2}{2} \\ axt &\leq \frac{x^2 + a^2 t^2}{2} \\ ayz &\leq \frac{y^2 + a^2 z^2}{2} \\ ayt &\leq \frac{y^2 + a^2 t^2}{2} \\ zt &\leq \frac{z^2 + t^2}{2} \quad (3) \end{aligned}$$

Lại quan sát biểu thức A và đối chiếu với các đánh giá trên, ta thấy hệ số của các đánh giá chưa khớp với A , nên ta sẽ nhân cả biểu thức A với hệ số a và nhân (2) với a , nhân (3) với $3a$, khi đó ta thu được

$$aA = axy + axz + axt + ayz + ayt + 3azt \leq a \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x^2 + a^2 z^2}{2} + \frac{x^2 + a^2 t^2}{2} + \frac{y^2 + a^2 z^2}{2} + \frac{y^2 + a^2 t^2}{2} + 3a \frac{z^2 + t^2}{2}$$

$$= x^2 \left(\frac{a}{2} + 1 \right) + y^2 \left(\frac{a}{2} + 1 \right) + z^2 \left(a^2 + \frac{3a}{2} \right) + t^2 \left(a^2 + \frac{3a}{2} \right)$$

Để tận dụng được giả thiết, chúng ta cần có $\frac{a}{2} + 1 = a^2 + \frac{3a}{2}$

Giải ra ta được $a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, $a = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, rõ ràng để bất đẳng thức được đúng chiều, ta sẽ chọn a dương,

tức $a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

Khi đó $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} A \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$ suy ra $A \leq \frac{2 + \sqrt{5}}{2}$

(Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{20}}$, $z = t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{20}}$ hoặc $x = y = -\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{20}}$, $z = t = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{20}}$)

Vậy GTLN của A là $\frac{2 + \sqrt{5}}{2}$