

Đề chính thức

Đề thi gồm có 01 trang

Môn thi chuyên: TOÁN

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (6,0 điểm).

a) Giải phương trình $x^3 - 2x^2 + x - 5(x-1)\sqrt{x} - 6 = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 5x + y = x^2y^2 - 15 \\ 2x + 3y = 3x^2y^2 - 13xy - 6. \end{cases}$$

Câu 2 (3,0 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - y^2 + 2(3x + y) = 23$.

b) Cho đa thức $P(x) = x^2 + bx + c$ có hai nghiệm nguyên. Biết rằng $|c| \leq 16$ và $|P(9)|$ là số nguyên tố. Tìm các hệ số b, c .

Câu 3 (2,0 điểm). Xét các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị

lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{b+1}} + \frac{1}{\sqrt{c+2}}$.

Câu 4 (7,0 điểm). Cho đường tròn (O) đường kính AB . Đường thẳng Δ tiếp xúc với (O) tại A , I là điểm cố định trên đoạn AB và CD là dây cung thay đổi của (O) luôn đi qua I . Các đường thẳng BC, BD cắt Δ lần lượt tại M, N .

a) Chứng minh rằng $CDNM$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN với đường thẳng AB . Chứng minh rằng $KMCI$ là tứ giác nội tiếp và tích $AM \cdot AN$ không đổi.

c) Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDNM$. Tìm vị trí của CD sao cho độ dài đoạn thẳng BT nhỏ nhất.

Câu 5 (2,0 điểm). Gọi M là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 2 chữ số khác nhau. Tìm số nguyên dương k lớn nhất để tồn tại tập hợp con A có k phần tử của tập hợp M sao cho tích của 4 số bất kì thuộc tập hợp A đều chia hết cho 3.

----- HẾT -----

Đáp án đề thi vào lớp 10 môn Toán chuyên Đại Học Vinh Nghệ An năm 2023

NGUYỄN NHẬT HUY – VÕ TRỌNG KHẢI

NGÀY 12 THÁNG 6 NĂM 2023

Câu 1

a) Giải phương trình $x^3 - 2x^2 + x - 5(x-1)\sqrt{x} - 6 = 0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x + y = x^2y^2 - 15 \\ 2x + 3y = 3x^2y^2 - 13xy - 6. \end{cases}$

Lời giải.

a) Điều kiện xác định: $x \geq 0$. Đặt $t = (x-1)\sqrt{x}$ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + x - 5(x-1)\sqrt{x} - 6 = 0 &\Leftrightarrow x(x-1)^2 - 5(x-1)\sqrt{x} - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow t^2 - 5t - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (t+1)(t-6) = 0. \end{aligned}$$

○ **Trường hợp 1.** $t = -1$ suy ra $0 \leq x < 1$. Đặt $\sqrt{x} = a (0 \leq a < 1)$, khi đó ta có

$$(x-1)\sqrt{x} = -1 \Leftrightarrow a^3 - a + 1 = 0 \text{ (vô lý } a^3 + 1 - a > 0).$$

○ **Trường hợp 2.** $t = 6$. Đặt $\sqrt{x} = a (a \geq 0)$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} (x-1)\sqrt{x} = 6 &\Leftrightarrow a^3 - a - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-2)(a^2 + 2a + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 2 \quad (\text{vì } a^2 + 2a + 3 = (a+1)^2 + 2 > 2 > 0) \\ &\Leftrightarrow x = 4 \quad (\text{thỏa mãn điều kiện}). \end{aligned}$$

Vậy tất cả các nghiệm thỏa mãn phương trình là $x = 4$.

b) Ta đặt phương trình như sau $\begin{cases} 5x + y = x^2y^2 - 15 & (1) \\ 2x + 3y = 3x^2y^2 - 13xy - 6. & (2) \end{cases}$

○ **Trường hợp 1.** Nếu $x = 0$ thì $-15 = y = -2$ vô lý nên trường hợp này vô nghiệm.

○ **Trường hợp 2.** Nếu $x \neq 0$, ta có biến đổi như sau

$$\begin{aligned} (1) \cdot 3 - (2) &\Leftrightarrow 13x = 13xy - 39 \\ &\Leftrightarrow xy = x + 3 \\ &\Leftrightarrow y = 1 + \frac{3}{x}. \end{aligned}$$

Thế $y = 1 + \frac{3}{x}$ vào phương trình (1), ta có

$$\begin{aligned} 5x + 1 + \frac{3}{x} &= (x+3)^2 - 15 \Leftrightarrow 5x^2 + x + 3 = x(x^2 + 6x + 9) - 15x \\ &\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 7x - 3 = 0. \\ &\Leftrightarrow (x+3)(x^2 - 2x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \{-3, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}. \end{aligned}$$

- Nếu $x = -3$ thì $y = 1 + \frac{3}{x} = 0$.

- Nếu $x = 1 + \sqrt{2}$ thì $y = 1 + \frac{3}{x} = -2 + 3\sqrt{2}$.
- Nếu $x = 1 - \sqrt{2}$ thì $y = -2 - 3\sqrt{2}$.

Vậy tất cả các nghiệm (x, y) thỏa mãn là $(-3, 0), (1 + \sqrt{2}, -2 + 3\sqrt{2}), (1 - \sqrt{2}, -2 - 3\sqrt{2})$.



Câu 2

- a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 - y^2 + 2(3x + y) = 23$.
- b) Cho đa thức $P(x) = x^2 + bx + c$ có hai nghiệm nguyên. Biết rằng $|c| \leq 16$ và $|P(9)|$ là số nguyên tố. Tìm các hệ số b, c .

Lời giải.

- a) Ta biến đổi phương trình như sau

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 2(3x + y) = 23 &\Leftrightarrow (x^2 + 6x + 9) - (y^2 - 2y + 1) = 31. \\ &\Leftrightarrow (x + 3)^2 - (y - 1)^2 = 31. \\ &\Leftrightarrow (x - y + 4)(x + y + 2) = 31. \end{aligned}$$

Từ đây, ta xét bảng sau

$x - y + 4$	31	1	-31	-1
$x + y + 2$	1	31	-1	-31
x	13	13	-19	-19
y	-14	16	16	-14

Vậy tất cả các nghiệm (x, y) thỏa mãn là $(13, -14), (13, 16), (-19, 16), (-19, -14)$.

- b) Gọi hai nghiệm nguyên của $P(x) = x^2 + bx + c$ là u, v .
 Theo định lý Viète ta được $u + v = -b, uv = c$.
 Vì $|P(9)|$ là số nguyên tố nên $|(9 - u)(9 - v)|$ là số nguyên tố dẫn đến $|9 - u| = 1$ hoặc $|9 - v| = 1$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $|9 - u| = 1 \Leftrightarrow u \in \{8, 10\}$.
- **Trường hợp 1.** $u = 10$, vì $|c| \leq 16$, nên $|v| \in \{0, 1\} \Leftrightarrow v \in \{-1, 0, 1\}$.
 Mặt khác $9 - 1 = 8, 9 - 0 = 9, 9 + 1 = 10$ đều không là số nguyên tố nên trường hợp này loại.
 - **Trường hợp 2.** $u = 8$, vì $|c| \leq 16$ nên $|v| \leq 2$.
 Mà v phải là số chẵn nên từ đây suy ra $v \in \{2, -2\}$. Thử lại cả hai giá trị này thỏa mãn và ta nhận được giá trị của b, c tương ứng là $-10, 16$ và $-6, -16$.
 Vậy tất cả cặp (b, c) thỏa mãn là $(b, c) \in \{(-10, 16), (-6, -16)\}$



Câu 3 Xét các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
 Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{b+1}} + \frac{1}{\sqrt{c+2}}$.

Lời giải. Ta có nhận xét sau

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{b+1}} \right)^2 &= \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)}} = \frac{a+b+2}{ab+a+b+1} + \frac{2}{\sqrt{ab+a+b+1}} \\ &\leq \frac{a+b+2}{a+b+1} + \frac{2}{\sqrt{a+b+1}} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a+b+1}} \right)^2. \end{aligned}$$

Do đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{b+1}} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{a+b+1}}.$$

Mặt khác, ta có $(a+b+c)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 = 1$ suy ra $a+b \geq 1-c$.

Từ đây kết hợp với $c \leq 1$ (vì $c \geq 0$ và $c^2 \leq 1$), ta suy ra

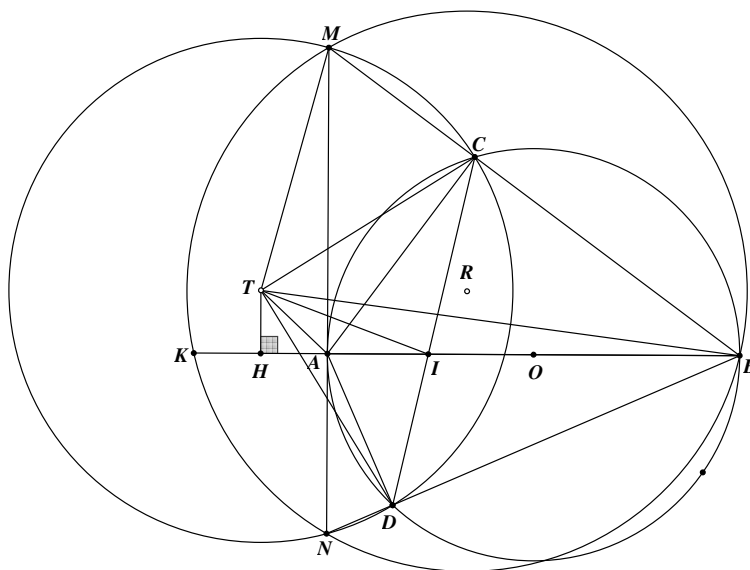
$$\begin{aligned} P &\leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2-c}} + \frac{1}{\sqrt{c+2}} = 1 + \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2-c}} + \frac{1}{\sqrt{c+2}} \right)^2} = 1 + \sqrt{\frac{1}{2-c} + \frac{1}{2+c} + \frac{2}{\sqrt{4-c^2}}} \\ &= 1 + \sqrt{\frac{4}{4-c^2} + \frac{2}{\sqrt{4-c^2}}} \leq 1 + \sqrt{\frac{4}{4-1} + \frac{2}{\sqrt{4-1}}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $a = b = 0, c = 1$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$. ▽

Câu 4 Cho đường tròn (O) đường kính AB . Đường thẳng Δ tiếp xúc với (O) tại A , I là điểm cố định trên đoạn AB và CD là dây cung thay đổi của (O) luôn đi qua I . Các đường thẳng BC, BD cắt Δ lần lượt tại M, N .

- Chứng minh rằng $CDNM$ là tứ giác nội tiếp.
- Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN với đường thẳng AB . Chứng minh rằng $KMCI$ là tứ giác nội tiếp và tích $AM \cdot AN$ không đổi.
- Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDNM$. Tìm vị trí của CD sao cho độ dài đoạn thẳng BT nhỏ nhất.

Lời giải.



- Áp dụng hệ thức lượng cho hai tam giác BAM và BAN với hai đường cao tương ứng là AC, AD ta có. $BA^2 = BC \cdot BM = BD \cdot BN$. Vì vậy tứ giác $CDNM$ nội tiếp.
- Ta có biến đổi góc $\widehat{MKB} = \widehat{MNB} = \widehat{DCB}$, Vì vậy tứ giác $CIKM$ nội tiếp.
Do đó $BC \cdot BM = BI \cdot BK = BA^2$, từ đây suy ra K là điểm cố định.
Từ đây ta suy ra $AM \cdot AN = AK \cdot AB$ cố định.
- Gọi r là bán kính (T) thì $r^2 - TA^2 = AM \cdot AN = a$ không đổi. Ta cũng có $ID \cdot IC$ không đổi, đặt $b = ID \cdot IC = r^2 - TI^2$ suy ra $TI^2 - TA^2 = a - b$.
Gọi H là hình chiếu của K lên AB theo định lý Pythagore ta có.

$$(AI + 2AH) \cdot AI = HI^2 - HA^2 = (TI^2 - TH^2) - (TA^2 - TH^2) = TI^2 - TA^2 = a - b.$$

Từ đây kết hợp với AI không đổi (A và I cố định) suy ra H cố định do đó BH không đổi. Khi đó, theo định lý Pythagore ta có.

$$BT^2 = TH^2 + BH^2 \geq BH^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi T trùng H tức là BA là trung trực của CD suy ra CD vuông góc AB tại I . Vậy khi CD vuông góc AB tại I thì độ dài đoạn thẳng BT nhỏ nhất.



Câu 5 Gọi M là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 2 chữ số khác nhau. Tìm số nguyên dương k lớn nhất để tồn tại tập hợp con A có k phần tử của tập hợp M sao cho tích của 4 số bất kì thuộc tập hợp A đều chia hết cho 3.

Lời giải. Trước hết, ta đếm số phần tử thuộc M mà chia hết cho 3.

Ứng với các số có chữ số hàng chục là 1, 4, 7 có 9 số thỏa mãn.

Ứng với các số có chữ số hàng chục là 2, 5, 8 có 9 số thỏa mãn.

Ứng với các số có chữ số hàng chục là 3, 6, 9 có 9 số thỏa mãn.

Vì vậy số phần tử chia hết cho 3 thuộc M là 27, ta chứng minh $|A|_{max} = 30$, thật vậy.

Trước hết, A không thể chứa quá 4 phần tử không chia hết cho 3 bởi vì tích của chúng sẽ không chia hết cho 3. Do đó, $|A| \leq 30$.

Xây dựng dấu bằng. Xét A là tập hợp các số có 2 chữ số khác nhau chia hết cho 3 và 3 phần tử bất kì thuộc các số còn lại.

Vậy số nguyên dương k lớn nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài là 30. ▽