

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THị xã Hoà Nhơn

Đề chính thức

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9

Năm học: 2020 – 2021

Môn: **TOÁN** – Ngày thi: **04/12/2020**

Thời gian làm bài: **150 phút** (không kể thời gian phát đề)

Bài 1. (4.5 điểm)

Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}.$

b) $B = \sqrt[3]{70 - \sqrt{4901}} + \sqrt[3]{70 + \sqrt{4901}}.$

c) $C = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}.$

Bài 2. (4.5 điểm)

a) Cho $a, b \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{a^2 + b^2}{ab}$, biết A có giá trị nguyên.

b) Cho ba số nguyên a, b, c và $M = (a+b)(b+c)(c+a) - abc$. Chứng minh rằng:

" Nếu $(a+b+c) : 4$ thì $M : 4$ ".

c) Tìm số $\overline{abcd}$ biết $\overline{abcd} : 3$ và $\overline{abc} - \overline{bda} = 650$.

Bài 3. (4.0 điểm)

a) Giải phương trình: $4x^2 + 9y + 1 = 3x + 6\sqrt{xy}$.

b) Cho hai số dương x, y thỏa mãn: $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2.$$

Bài 4. (3.0 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Gọi I là một điểm trên nửa đường tròn tâm O (I khác A và B). Vẽ đường tròn tâm I tiếp xúc với AB tại H . Từ A và B vẽ hai tiếp tuyến với đường tròn tâm I , tiếp xúc với đường tròn tâm I lần lượt tại C và D .

a) Chứng minh C, I, D thẳng hàng.

b) Chứng minh $AC \cdot BD = \frac{CD^2}{4}$.

Bài 5. (4.0 điểm)

a) Cho tam giác ABC có đường phân giác trong AD (D thuộc BC) sao cho $BD = a$ và $CD = b$ (với $a > b$). Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt tia BC tại M . Tính MA theo a và b .

b) Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$ và M là một điểm thuộc nửa đường tròn (khác A và B). Tiếp tuyến của (O) tại M cắt các tiếp tuyến tại A và B của (O) lần lượt tại các điểm C và D . Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích của hai tam giác ACM và BDM .

----- ♪ HẾT ♪ -----

ĐÁP ÁN THAM KHẢO – HSG TOÁN 9 THỊ XÃ HOÀI NHƠN – 2021**Bài 1. (4.5 điểm)**

Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}.$

b) $B = \sqrt[3]{70 - \sqrt{4901}} + \sqrt[3]{70 + \sqrt{4901}}.$

c) $C = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}.$

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } A &= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 3} \\ &= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{5} + 1} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } B^3 &= 140 + 3\sqrt[3]{(70 - \sqrt{4901})(70 + \sqrt{4901})} \cdot (\sqrt[3]{70 - \sqrt{4901}} + \sqrt[3]{70 + \sqrt{4901}}) \\ &\Leftrightarrow B^3 + 3B - 140 = 0 \Leftrightarrow B^3 - 125 + 3B - 15 = 0 \Leftrightarrow (B - 5)(B^2 + 5B + 28) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} B - 5 = 0 \\ B^2 + 5B + 28 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 5 \\ \left(B + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{87}{4} = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy $B = 5$.

$$\text{c) Ta có: } \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$$\text{Áp dụng ta được: } C = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98}} - \frac{1}{\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10}.$$

Bài 2. (4.5 điểm)

a) Cho $a, b \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{a^2 + b^2}{ab}$, biết A có giá trị nguyên.

b) Cho ba số nguyên a, b, c và $M = (a+b)(b+c)(c+a) - abc$. Chứng minh rằng:

" Nếu $(a+b+c) : 4$ thì $M : 4$ ".

c) Tìm số $\overline{abcd}$ biết $\overline{abcd} : 3$ và $\overline{abc} - \overline{bda} = 650$.

$$\text{a) Đặt } d = \text{UCLN}(a, b), \text{ suy ra: } \begin{cases} a = d.m \\ b = d.n \end{cases}; \text{ với } (m, n) = 1 \text{ và } m, n, d \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Khi đó } A = \frac{d^2.m^2 + d^2.n^2}{d^2.m.n} = \frac{m^2 + n^2}{m.n}.$$

Vì A có giá trị nguyên nên

$$m^2 + n^2 : m.n \longrightarrow \begin{cases} m^2 + n^2 : m \Rightarrow n^2 : m \\ m^2 + n^2 : n \Rightarrow m^2 : n \end{cases}, \text{ mà } (m, n) = 1 \Rightarrow \begin{cases} m : n \\ n : m \end{cases} \longrightarrow m = n.$$

$$\text{Vậy } A = \frac{m^2 + n^2}{m.n} = \frac{2m^2}{m^2} = 2.$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } M &= (a+b)(b+c)(c+a) - abc \\ &= (a+b+c-c)(ab+bc+ca+c^2) - abc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a+b+c)(ab+bc+ca) + (a+b+c)c^2 - (ab+bc+ca+c^2)c - abc \\
 &= (a+b+c)(ab+bc+ca) - 2abc.
 \end{aligned}$$

Vì $(a+b+c) : 4$ nên trong ba số a, b, c phải có ít nhất một số chẵn $\longrightarrow 2abc : 4$.

Vậy $M : 4$.

c) Vì $\overline{abc} - \overline{bda} = 650$ mà 650 là số tròn chục nên $c = a$.

Suy ra $\overline{ab} - \overline{bd} = 65 \Leftrightarrow 10a + b - 10b - d = 65 \Leftrightarrow 10a = 65 + 9b + d \geq 74$ (do $b \geq 1$).

Lại có $10a \leq 90 \longrightarrow a = 8; 9$.

- Với $a = 8 \Rightarrow 9b + d = 15 \longrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ d = 6 \end{cases}$. Khi đó $\overline{abcd} = 8186 \not\vdots 3$. Do đó trường hợp này loại.
- Với $a = 9 \Rightarrow 9b + d = 15 \longrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ d = 7 \end{cases}$. Khi đó $\overline{abcd} = 9297 : 3$. Do đó trường hợp này thỏa.

Vậy số cần tìm là: 9297.

Bài 3. (4.0 điểm)

a) Giải phương trình: $4x^2 + 9y + 1 = 3x + 6\sqrt{xy}$.

b) Cho hai số dương x, y thỏa mãn: $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2.$$

a) Điều kiện $xy \geq 0$.

- Trường hợp 1:** $x = 0$, ta được phương trình: $9y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{9}$.

Do đó, trong trường hợp này phương trình có nghiệm là: $(x; y) = \left(0; -\frac{1}{9}\right)$.

- Trường hợp 2:** $y = 0$, ta được phương trình: $4x^2 + 1 = 3x \Leftrightarrow \left(2x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0$ (vô nghiệm).

Do đó, trong trường hợp này phương trình vô nghiệm.

- Trường hợp 3:** $x > 0, y > 0$. Khi đó

$$4x^2 + 9y + 1 = 3x + 6\sqrt{xy} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 + 9y - 6\sqrt{xy} + x = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 + (3\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 = 0$$

$$\text{Vì } \begin{cases} (2x - 1)^2 \geq 0 \\ (3\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 3\sqrt{y} - \sqrt{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ và } y = \frac{1}{18}.$$

Do đó, trong trường hợp này phương trình có nghiệm là: $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{18}\right)$.

- Trường hợp 4:** $x < 0, y < 0$. Khi đó

$$4x^2 + 9y + 1 = 3x + 6\sqrt{xy} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 + 9y + 6\sqrt{xy} + x = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 + (3\sqrt{-y} - \sqrt{-x})^2 = 0$$

$$\text{Vì } \begin{cases} (2x - 1)^2 \geq 0 \\ (3\sqrt{-y} - \sqrt{-x})^2 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 3\sqrt{-y} - \sqrt{-x} = 0 \end{cases} \text{ hệ này vô nghiệm.}$$

Do đó, trong trường hợp này phương trình vô nghiệm.

➤ Vậy nghiệm của phương trình là: $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{18}\right), \left(0; -\frac{1}{9}\right)$.

b) Với x, y dương và $x + y = 1$, ta có: $P = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + 4 = (x^2 + y^2) \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2 y^2}\right) + 4$.

- Ta có: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \xrightarrow{x+y=1} x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$.
- Lại có: $1 = (x+y)^2 \geq 4xy$, suy ra $\frac{1}{xy} \geq 4 \longrightarrow \frac{1}{x^2 y^2} \geq 16$.

Do đó $P \geq \frac{1}{2} \cdot (1+16) + 4 = \frac{25}{2}$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

➤ Vậy $P_{\min} = \frac{25}{2}$, xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Bài 4. (3.0 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Gọi I là một điểm trên nửa đường tròn tâm O (I khác A và B). Vẽ đường tròn tâm I tiếp xúc với AB tại H . Từ A và B vẽ hai tiếp tuyến với đường tròn tâm I , tiếp xúc với đường tròn tâm I lần lượt tại C và D .

a) Chứng minh C, I, D thẳng hàng.

b) Chứng minh $AC \cdot BD = \frac{CD^2}{4}$.

a) • Vì BH, BD là tiếp tuyến của đường tròn (I) nên IB là tia phân giác của $\widehat{HID} \Rightarrow \widehat{I_1} = \widehat{I_2}$.

• Vì AC, AH là tiếp tuyến của đường tròn (I) nên IA là tia phân giác của $\widehat{CIH} \Rightarrow \widehat{I_3} = \widehat{I_4}$.

• Vì $\triangle AIB$ có AB là đường kính của đường tròn (O) và I nằm trên đường tròn (O) $\longrightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{I_2} + \widehat{I_3} = 90^\circ$.

Do đó $\widehat{I_1} + \widehat{I_2} + \widehat{I_3} + \widehat{I_4} = 180^\circ \longrightarrow C, I, D$ thẳng hàng.

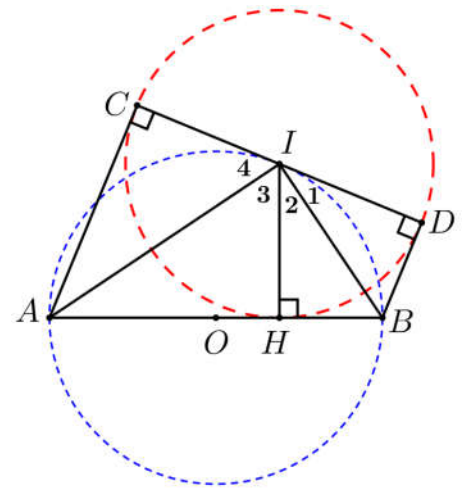
b) • Tam giác AIB vuông tại I có IH là đường cao nên $IH^2 = HA \cdot HB$.

• Vì C, I, D thẳng hàng mà I là tâm của đường tròn nên CD là đường kính $\Rightarrow IH = \frac{CD}{2}$.

• Vì BH, BD là tiếp tuyến của đường tròn (I) nên $HB = BD$.

• Vì AC, AH là tiếp tuyến của đường tròn (I) nên $HA = AC$.

➤ Do đó $IH^2 = HA \cdot HB \Leftrightarrow \left(\frac{CD}{2}\right)^2 = AC \cdot BD \Leftrightarrow AC \cdot BD = \frac{CD^2}{4}$.



Bài 5. (4.0 điểm)

a) Cho tam giác ABC có đường phân giác trong AD (D thuộc BC) sao cho $BD = a$ và $CD = b$ (với $a > b$). Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt tia BC tại M . Tính MA theo a và b .

b) Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$ và M là một điểm thuộc nửa đường tròn (khác A và B). Tiếp tuyến của (O) tại M cắt các tiếp tuyến tại A và B của (O) lần lượt tại các điểm C và D . Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích của hai tam giác ACM và BDM .

a) • Ta có: $\widehat{MAC}$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và $\widehat{ABC}$ là góc nội tiếp cùng chắn một cung $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{ABC}$.

• Vì AD là đường phân giác của $\triangle ABC \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB} = \frac{b}{a}$.

• Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MBA$, ta có:

$$\widehat{MAC} = \widehat{ABC} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\widehat{AMB} \text{ chung.}$$

Do đó $\triangle MAC \sim \triangle MBA$ (g - g)

$$\text{Suy ra } \frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MA} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{a} \longrightarrow \frac{MC}{MB} = \frac{MC}{MA} \cdot \frac{MA}{MB} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow MC = MB \cdot \frac{b^2}{a^2} = (MC + a + b) \cdot \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow MC \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = (a + b) \cdot \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow MC = \frac{b^2}{a - b}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{MC}{MA} = \frac{b}{a} \longrightarrow MA = \frac{a \cdot MC}{b} = \frac{ab}{a - b}.$$

b) Ta có: $CA = CM$ và $DB = DM$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau).

Ta có: $CD = CM + MD \longrightarrow CD = AC + BD$.

Kẻ $MH \perp AB$ ($H \in AB$), khi đó $MH \leq MO = R$.

Tứ $ABDC$ là hình thang vuông nên $CD \geq AB = 2R$.

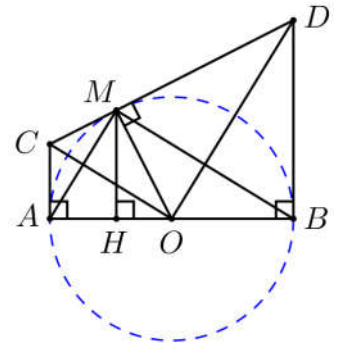
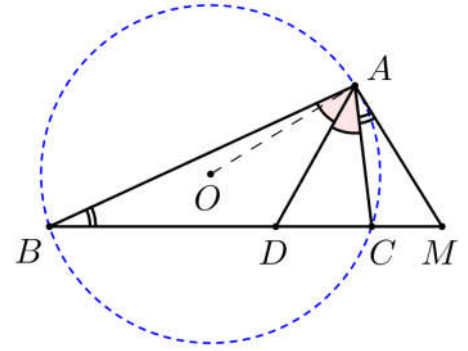
$$\text{Ta có: } S_{ABDC} = \frac{(AC + BD) \cdot AB}{2} = \frac{CD \cdot AB}{2} \geq \frac{AB^2}{2} = 2R^2.$$

$$S_{\triangle MAB} = \frac{MH \cdot AB}{2} \leq \frac{MO \cdot AB}{2} = R^2.$$

$$\text{Do đó } S_{\triangle CAM} + S_{\triangle DBM} = S_{ABDC} - S_{\triangle MAB} \geq 2R^2 - R^2 = R^2.$$

Dấu "=" xảy ra khi $H \equiv O \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung AB .

Vậy $S_{\triangle CAM} + S_{\triangle DBM}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng R^2 khi M là điểm chính giữa cung AB .



----- ♪ CHÚC CÁC EM MAY MẮN ♪ -----