

Lưu ý:

- Thí sinh lựa chọn đáp án phần trắc nghiệm khách quan **chỉ có một** lựa chọn đúng.
- Thí sinh làm bài thi (cả phần trắc nghiệm khách quan và phần tự luận) trên tờ giấy thi; **không** làm bài trên đề thi.

A. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8,0 điểm)

Câu 1: Biết $\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$. Giá trị $a-b$ bằng

- A. 2. B. 4. C. $\sqrt{3}-\sqrt{5}$. D. -2.

Câu 2: Cho $a = \sqrt[3]{13-7\sqrt{6}} + \sqrt[3]{13+7\sqrt{6}}$. Giá trị $(a^3+15a-25)^{2024}$ bằng

- A. 5. B. 1. C. 0. D. 2^{2024} .

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = (2m+1)x + m - 3$. Gọi m_0 là giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $0 < m_0 < 1$. B. $-1 < m_0 < 0$. C. $1 < m_0 < 2$. D. $2 < m_0 < 3$.

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $(d_1): y = mx + 5$ ($m \neq 0$) và $(d_2): y = -\frac{1}{m}x + 5$ ($m \neq 0$). Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2 ; B và C lần lượt là giao điểm của d_1 và d_2 với trục hoành. Giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác ABC bằng

- A. 1. B. 9. C. 25. D. 16.

Câu 5: Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24 km. Khi đi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm 4 km/h so với lúc đi nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B bằng

- A. 15 km/h. B. 9 km/h. C. 10 km/h. D. 12 km/h.

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$. Trên (P) lấy hai điểm A, B lần lượt có hoành độ là -1 và 3. Diện tích tam giác OAB bằng

- A. 16. B. 6. C. 8. D. 12.

Câu 7: Cho phương trình $x^2 - 2mx - m - 4 = 0$ với m là tham số. Biết rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , khi $\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}$ đạt giá trị lớn nhất thì $m = \frac{-a}{b}$, $(a, b \in \mathbb{Z}^+, (a, b) = 1)$. Tổng $4a + b$ bằng

- A. 8. B. 5. C. 0. D. 4.

Câu 8: Cho phương trình $(m-1)x^2 - 2(2m-3)x - 5m + 25 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm là số hữu tỉ?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 9: Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 3, AC = 4$. Điểm M thuộc cạnh AB sao cho $\frac{MB}{MA} = \frac{1}{2}$. Điểm P thuộc tia AC sao cho $3AC = 2AP$. Gọi G là giao điểm của BC và MP . Biết

$AG = \frac{a\sqrt{b}}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}^+, (a, b) = 1$). Tổng $a + b$ bằng

- A. 9. B. 10. C. 12. D. 11.

Câu 10: Cho đường tròn $(O; R)$ nội tiếp trong hình thang cân $ABCD$ (đáy lớn CD). Đường tròn $(O; R)$ tiếp xúc với hai cạnh bên của hình thang lần lượt tại hai điểm M, N . Biết $R = 10\text{ cm}; MN = 16\text{ cm}$. Chu vi của hình thang bằng

- A. 100 cm . B. 80 cm . C. 85 cm . D. 75 cm .

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Biết đường chéo $AC' = 2\sqrt{3}\text{ cm}$. Thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

- A. 8 cm^3 . B. 6 cm^3 . C. 10 cm^3 . D. 9 cm^3 .

Câu 12: Cho ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ có bán kính bằng nhau và bằng 3, đôi một tiếp xúc ngoài nhau. Một đường tròn (O) chứa ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ và tiếp xúc với ba đường tròn đó lần lượt tại ba điểm D, E, F . Chu vi của tam giác DEF bằng

- A. $9 + 6\sqrt{3}$. B. $9 + 6\sqrt{2}$. C. $18 + 9\sqrt{3}$. D. $6 + 9\sqrt{3}$.

Câu 13: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , đường trung tuyến AM , đường phân giác trong AI của góc A của tam giác ABC . Biết rằng $AC = \frac{4}{3}AB$ và diện tích tam giác ABC là 24 cm^2 .

Giá trị của $|IH - IM|$ bằng

- A. $\frac{1}{35}\text{ cm}$. B. $\frac{2}{35}\text{ cm}$. C. $\frac{4}{35}\text{ cm}$. D. $\frac{1}{7}\text{ cm}$.

Câu 14: Cho điểm P nằm trong đường tròn $(O; R)$. Dây cung MN của $(O; R)$ đi qua P . Biết $R = 10\text{ cm}$ và $OP = 4\text{ cm}$. Tích $PM \cdot PN$ bằng

- A. 64 cm . B. 84 cm . C. 81 cm . D. 49 cm .

Câu 15: Cho nửa đường tròn (O) đường kính $BC = 2R$. Điểm A di động trên nửa đường tròn (O) . Gọi H là hình chiếu của điểm A lên BC . Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H lên AC và AB . Giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $AEHD$ bằng

- A. $\frac{R^2}{4}$. B. $\frac{R^2}{3}$. C. $\frac{R^2}{8}$. D. $\frac{R^2}{2}$.

Câu 16: Một nhóm bạn đi câu cá. Bạn câu được ít nhất câu được $\frac{1}{7}$ tổng số cá mà cả nhóm câu được, bạn câu được nhiều nhất câu được $\frac{1}{5}$ tổng số cá mà cả nhóm câu được. Biết rằng số cá câu được của mỗi bạn là khác nhau. Số người của nhóm đi câu cá là

- A. 7. B. 5. C. 6. D. 12.

B. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm)

Câu 1 (3,0 điểm).

- Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y(y^2 + 2y - 4x) = 0$.
- Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(n; k)$ sao cho $n^4 + 4^{2k+1}$ là số nguyên tố.

Câu 2 (4,0 điểm).

- Giải phương trình: $x^2 + 5x + 1 = 4\sqrt{x}(x + 1)$.

- Cho $x; y; z$ là các số thực dương thỏa mãn
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \\ y^2 + z^2 - 4y - 12 = 0 \\ y^2 - 4y - z - xz + 4 = 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $xy + yz - 2x + y - 2z = 14$.

c) Cho $P(x)$ là đa thức bậc 4 thỏa mãn $P(-2) = 0$ và $P(x) - P(x-2) = x(x+2)(3x+1)$.

Xác định đa thức $P(x)$.

Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), có trục tâm H và nội tiếp trong đường tròn (O) . Gọi D, E, F tương ứng là chân các đường cao của tam giác ABC kẻ từ A, B, C . Tia AO cắt BC tại M , gọi P, Q tương ứng là hình chiếu của M trên các cạnh AC, AB .

a) Chứng minh tam giác HFE đồng dạng với tam giác MPQ .

b) Chứng minh $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{DB}{DC} \cdot \frac{MB}{MC}$.

c) Khi điểm A di động trên (O) , dây cung BC cố định sao cho tam giác ABC nhọn. Đường thẳng chứa tia phân giác ngoài của góc $\widehat{BHC}$ cắt AB, AC lần lượt tại hai điểm R, N . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ARN cắt đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ tại điểm thứ hai là K . Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 4 (1,0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 27$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{7a^2 + 6ab + 5b^2}{\sqrt{3a^2 + 10ab + 5b^2}} + \frac{7b^2 + 6bc + 5c^2}{\sqrt{3b^2 + 10bc + 5c^2}} + \frac{7c^2 + 6ca + 5a^2}{\sqrt{3c^2 + 10ca + 5a^2}}.$$

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

I. Một số chú ý khi chấm bài tự luận

- Hướng dẫn chấm thi dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm thi giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic và có thể chia nhỏ đến 0,25 điểm.
- Thí sinh làm bài theo cách khác với hướng dẫn chấm mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của hướng dẫn chấm.
- Điểm bài thi là tổng điểm các câu không làm tròn số.

II. Đáp án – thang điểm

1. Phần trắc nghiệm khách quan: Mỗi câu trả lời đúng được 0,5 điểm.

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6	Câu 7	Câu 8
D	B	B	C	D	B	A	B
Câu 9	Câu 10	Câu 11	Câu 12	Câu 13	Câu 14	Câu 15	Câu 16
D	A	A	C	A	B	D	C

2. Phần tự luận

Câu 1 (3,0 điểm).

- Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y(y^2 + 2y - 4x) = 0$.
- Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(n; k)$ sao cho $n^4 + 4^{2k+1}$ là số nguyên tố.

Nội dung	Điểm
a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y(y^2 + 2y - 4x) = 0$.	2,0
Ta có $x^2 + y(y^2 + 2y - 4x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4yx + y^3 + 2y^2 = 0. (1)$	0,25
Phương trình (1) với x là ẩn, y là tham số, ta có:	0,25
$\Delta' = 4y^2 - y^3 - 2y^2 = 2y^2 - y^3 = y^2(2 - y)$	0,5
TH1. $y \geq 3; y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \Delta' < 0$: Phương trình vô nghiệm.	0,25
TH2. $y = 2: (1) \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.	0,25
TH3. $y = 1: (1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.	0,25
Vậy có 3 cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn là $(4; 2); (1; 1); (3; 1)$.	0,25
b) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(n; k)$ sao cho $n^4 + 4^{2k+1}$ là số nguyên tố.	1,0
$M = n^4 + 4^{2k+1} = (n^2)^2 + (2^{2k+1})^2 = (n^2 + 2^{2k+1})^2 - 2.n^2.2^{2k+1}$ $= (n^2 + 2^{2k+1})^2 - (n.2^{k+1})^2 = (n^2 + 2^{2k+1} + n.2^{k+1})(n^2 + 2^{2k+1} - n.2^{k+1})$.	0,25
Vì $n^2 + 2^{2k+1} + n.2^{k+1} \geq 2, \forall n; k \in \mathbb{N}$, và M là số nguyên tố nên $n^2 + 2^{2k+1} - n.2^{k+1} = 1$	0,25

$\Leftrightarrow n^2 - 2n \cdot 2^{k+1} + 2^{2(k+1)} + n^2 = 2 \Leftrightarrow (n - 2^{k+1})^2 + n^2 = 2$ $\Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n - 2^{k+1} = 1 \\ n - 2^{k+1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ k = 0 \end{cases}$	0,25
Thử lại: Với $n = 1; k = 0 \Rightarrow M = 1 + 4 = 5$ là số nguyên tố. Vậy: $n = 1; k = 0$.	0,25

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Giải phương trình: $x^2 + 5x + 1 = 4\sqrt{x}(x+1)$.

b) Cho $x; y; z$ là các số thực dương thỏa mãn
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \\ y^2 + z^2 - 4y - 12 = 0 \\ y^2 - 4y - z - xz + 4 = 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $xy + yz - 2x + y - 2z = 14$.

c) Cho $P(x)$ là đa thức bậc 4 thỏa mãn $P(-2) = 0$ và $P(x) - P(x-2) = x(x+2)(3x+1)$. Xác định đa thức $P(x)$.

Nội dung	Điểm
a) Giải phương trình: $x^2 + 5x + 1 = 4\sqrt{x}(x+1)$.	2,0
+) Điều kiện: $x \geq 0$.	
+) $x^2 + 5x + 1 = 4\sqrt{x}(x+1) \Leftrightarrow x^2 + 5x + 1 - 4x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} = 0$.	0,25
+) $x = 0$: không là nghiệm của phương trình	0,25
+) $x > 0$: Chia cả hai vế của phương trình cho x , ta được:	
$x + 5 + \frac{1}{x} - 4\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right) - 4\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + 5 = 0$	0,5
Đặt: $t = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} (t \geq 2) \Rightarrow x + \frac{1}{x} = t^2 - 2$.	0,25
Ta được phương trình: $t^2 - 2 - 4t + 5 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$	0,25
+) $t = 1$: loại do điều kiện $t \geq 2$.	
+) $t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 3 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \sqrt{x} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).	0,5
Vậy $x = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ và $x = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ là hai nghiệm của phương trình.	

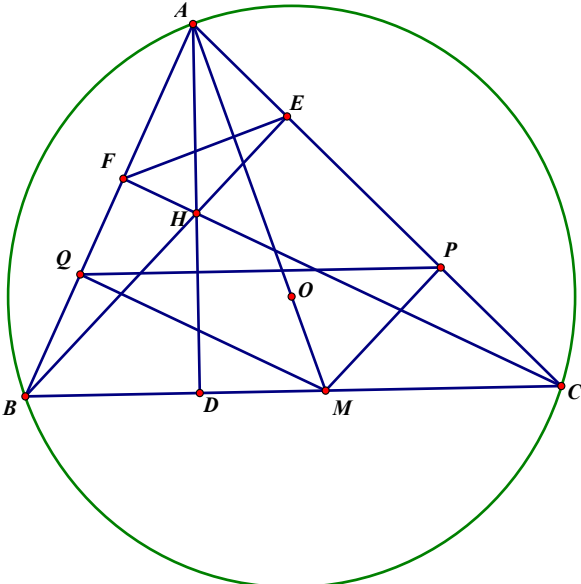
b) Cho $x; y; z$ là các số thực dương thỏa mãn $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \\ y^2 + z^2 - 4y - 12 = 0 \\ y^2 - 4y - z - xz + 4 = 0. \end{cases}$ Chứng minh rằng: $xy + yz - 2x + y - 2z = 14$.	1,0
$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \\ y^2 + z^2 - 4y - 12 = 0 \\ y^2 - 4y - z - xz + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9 & (1) \\ (y-2)^2 + z^2 = 16 & (2) \\ (y-2)^2 = (x+1)z & (3) \end{cases}$	0,25
Từ (1) và (2) suy ra $(x+1)^2 - z^2 = -7 \Leftrightarrow (x+1-z)(x+1+z) = -7$ (4). Từ (2) và (3) suy ra $z^2 + z(x+1) = 16 \Leftrightarrow z(x+1+z) = 16 \Leftrightarrow x+z+1 = \frac{16}{z}$ (5). Thế (5) vào (4) ta có $(x+1-z) \cdot \frac{16}{z} = -7 \Leftrightarrow x+1 = \frac{9z}{16}$ (6)	0,25
Suy ra $z^2 + \frac{9z^2}{16} = 16 \Leftrightarrow z = \frac{16}{5}$ (do $z > 0$) Thế vào (2) suy ra $(y-2)^2 = \frac{144}{25} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2 = \frac{12}{5} \\ y-2 = -\frac{12}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{22}{5} (tm) \\ y = -\frac{2}{5} (l) \end{cases}$. Thế vào (6) suy ra $x = \frac{4}{5}$. Vậy ta có $xy + yz - 2x + y - 2z = 14$.	0,5
c) Cho $P(x)$ là đa thức bậc 4 thỏa mãn $P(-2) = 0$ và $P(x) - P(x-2) = x(x+2)(3x+1)$. Xác định đa thức $P(x)$.	1,0
Ta thấy: $\begin{cases} P(0) - P(-2) = 0 \\ P(-2) - P(-4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(0) = 0 \\ P(-4) = 0 \end{cases}$ (vì $P(-2) = 0$)	0,25
Do $P(0) = P(-2) = P(-4) = 0 \Rightarrow P(x) = x(x+2)(x+4)(ax+b) (a \neq 0)$.	0,25
Ta có: $P(x) - P(x-2) = x(x+2)(3x+1) \Rightarrow \begin{cases} P(2) - P(0) = 56 \\ P(4) - P(2) = 312 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(2) = 56 \\ P(4) = 368 \end{cases}$	0,25
Suy ra $\begin{cases} 2a+b = \frac{7}{6} \\ 4a+b = \frac{23}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{8} \\ b = \frac{5}{12} \end{cases}$. Vậy đa thức $P(x) = x(x+2)(x+4)\left(\frac{3}{8}x + \frac{5}{12}\right) = \frac{3}{8}x^4 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 + \frac{10}{3}x$.	0,25

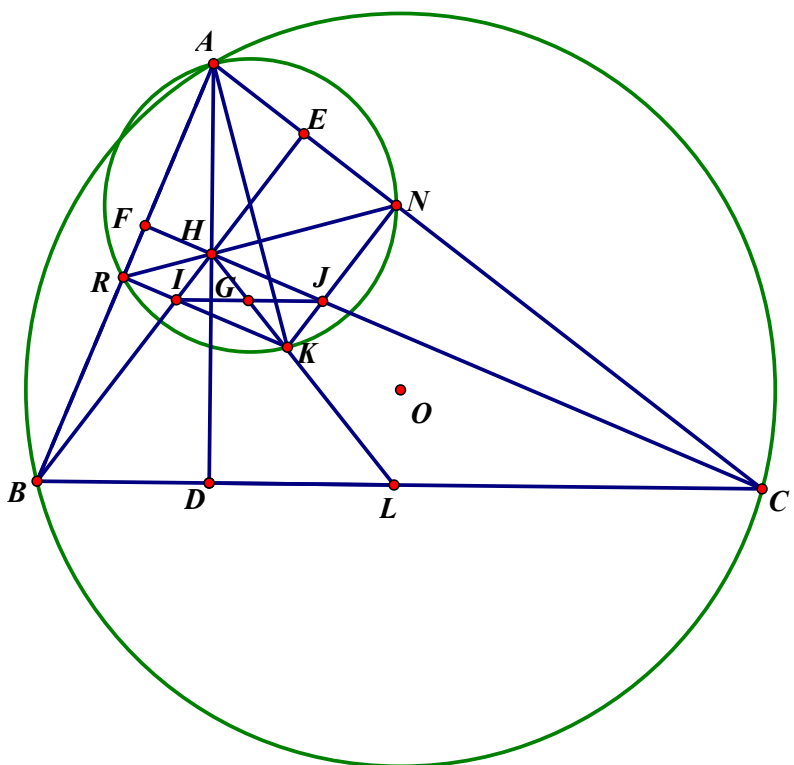
Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), có trực tâm H và nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi D, E, F tương ứng là chân các đường cao của tam giác ABC kẻ từ A, B, C . Tia AO cắt BC tại M , gọi P, Q tương ứng là hình chiếu của M trên các cạnh AC, AB .

a) Chứng minh rằng tam giác HFE đồng dạng với tam giác MPQ .

b) Chứng minh rằng $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{DB}{DC} \cdot \frac{MB}{MC}$.

c) Khi điểm A di động trên (O), dây cung BC cố định sao cho tam giác ABC nhọn. Đường thẳng chứa tia phân giác ngoài của góc $\widehat{BHC}$ cắt AB, AC lần lượt tại hai điểm R, N . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ARN cắt đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ tại điểm thứ hai là K . Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Nội dung	Điểm
a) Chứng minh rằng tam giác HFE đồng dạng với tam giác MPQ.	1,5
	
Tứ giác $AFHE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FAE} + \widehat{FHE} = 180^\circ$. Tứ giác $AQMP$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QAP} + \widehat{QMP} = 180^\circ$. Suy ra $\widehat{FHE} = \widehat{QMP}$. (1)	0,5
Ta có $\widehat{MAC} = 90^\circ - \frac{\widehat{AOC}}{2} = 90^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{FAH}$.	0,5
Tứ giác $AFHE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FAH} = \widehat{FEH}$. Tứ giác $AQMP$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MAP} = \widehat{MQP}$. Suy ra $\widehat{FEH} = \widehat{MQP}$. (2) Từ (1) và (2) suy ra tam giác HFE đồng dạng với tam giác MPQ.	0,5
b) Chứng minh rằng $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{DB}{DC} \cdot \frac{MB}{MC}$.	1,5

Ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{S_{AHB}}{S_{AHC}} = \frac{HF \cdot AB}{HE \cdot AC} = \frac{HF}{HE} \cdot \frac{AB}{AC}$.	0,5
Ta có $\frac{MB}{MC} = \frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{MQ \cdot AB}{MP \cdot AC} = \frac{MQ}{MP} \cdot \frac{AB}{AC}$.	0,5
Vì tam giác HFE đồng dạng với tam giác MPQ suy ra $\frac{HF}{HE} = \frac{MP}{MQ}$.	0,25
Vậy $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{MB}{MC} = \frac{HF}{HE} \cdot \frac{MQ}{MP} \cdot \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.	0,25
c) Khi điểm A di động trên (O), dây cung BC cố định sao cho tam giác ABC nhọn. Đường thẳng chứa tia phân giác ngoài của góc $\widehat{BHC}$ cắt AB, AC lần lượt tại hai điểm R, N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ARN cắt đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ tại điểm thứ hai là K. Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.	1,0
	
Ta có $\widehat{RHB} = \widehat{NHC}$ và $\widehat{RBH} = \widehat{NCH}$ (tứ giác $BFEC$ nội tiếp). Do đó $\widehat{ARH} = \widehat{RBH} + \widehat{RHB} = \widehat{NCH} + \widehat{NHC} = \widehat{ANH}$. Suy ra tam giác ARN cân A	0,25
Lại có, AK là phân giác trong $\widehat{RAN}$. Suy ra AK là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ARN. Suy ra $\widehat{ARK} = \widehat{ANK} = 90^\circ \Rightarrow KR \parallel CF; KN \parallel BE$. Gọi I là giao điểm của BH và KR, J là giao điểm của CH và KN. Suy ra tứ giác $IHKJ$ là	0,25

hình bình hành. Ta có HK đi qua trung điểm G của IJ . (1)	
Lại có, K là điểm chính giữa $\widehat{RN} \Rightarrow \widehat{KRN} = \widehat{KNR} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$. Do đó, $\widehat{KRN} = \widehat{KAN} = \widehat{RHB} = \frac{1}{2} \widehat{BAC} \Rightarrow$ tam giác IRH cân tại $I \Rightarrow IH = IR$. Tương tự $JH = JN$.	0,25
Ta có tam giác BRI đồng dạng tam giác CNJ. Suy ra $\frac{IR}{IB} = \frac{JN}{JC} \Rightarrow \frac{IH}{IB} = \frac{JH}{JC} \Rightarrow IJ \parallel BC$ (2). Từ (1) và (2) suy ra HK đi qua điểm trung điểm L của đoạn BC mà BC cố định nên L là điểm cố định.	0,25

Câu 4 (1,0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 27$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $P = \frac{7a^2 + 6ab + 5b^2}{\sqrt{3a^2 + 10ab + 5b^2}} + \frac{7b^2 + 6bc + 5c^2}{\sqrt{3b^2 + 10bc + 5c^2}} + \frac{7c^2 + 6ca + 5a^2}{\sqrt{3c^2 + 10ca + 5a^2}}$.

Nội dung	Điểm
Ta có: $7a^2 + 6ab + 5b^2 = \frac{2}{9}(5a + 4b)^2 + \frac{13}{9}(a - b)^2 \geq \frac{2}{9}(5a + 4b)^2.$ Đẳng thức xảy ra khi $a = b$. $3a^2 + 10ab + 5b^2 = \frac{2}{9}(4a + 5b)^2 - \frac{5}{9}(a - b)^2 \leq \frac{2}{9}(4a + 5b)^2.$ Đẳng thức xảy ra khi $a = b$. Suy ra $\sqrt{3a^2 + 10ab + 5b^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{3}(4a + 5b).$ Do đó $\frac{7a^2 + 6ab + 5b^2}{\sqrt{3a^2 + 10ab + 5b^2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{(5a + 4b)^2}{4a + 5b}.$	0,25
Tương tự $\frac{7b^2 + 6bc + 5c^2}{\sqrt{3b^2 + 10bc + 5c^2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{(5b + 4c)^2}{4b + 5c}; \frac{7c^2 + 6ca + 5a^2}{\sqrt{3c^2 + 10ca + 5a^2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{(5c + 4a)^2}{4c + 5a}.$ Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta có $P \geq \frac{\sqrt{2}}{3} \left[\frac{(5a + 4b)^2}{4a + 5b} + \frac{(5b + 4c)^2}{4b + 5c} + \frac{(5c + 4a)^2}{4c + 5a} \right]$	0,25
Theo bất đẳng thức Cô si ta có $\frac{(5a + 4b)^2}{4a + 5b} + (4a + 5b) \geq 2(5a + 4b).$ Suy ra $\frac{(5a + 4b)^2}{4a + 5b} \geq 6a + 3b.$ Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.	0,25

Tương tự ta có $P \geq \frac{\sqrt{2}}{3}(9a+9b+9c) = 3\sqrt{2}(a+b+c)$.	
Mặt khác ta có $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ nên từ giả thiết, ta có $a+b+c \geq 9$. Suy ra $P \geq 27\sqrt{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $27\sqrt{2}$. Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c=3$.	0,25

.....**Hết**.....