

Câu I. (2 điểm)

1) Cho $x = \frac{23}{\sqrt{31+12\sqrt{3}}}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x^4 + 5x^3 - 20x^2 - 27x + 30}{x^2 + 4x - 21}$

2) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c + 2\sqrt{abc} = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-c)(1-a)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} - \sqrt{abc} = 1$$

Câu II. (2 điểm)

1) Giải phương trình $x^3 + x^2 - x + 1 = \sqrt{3x+1}$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + 2x - y = 3 \\ \frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{y^2 + 4y + 7} = 1 \end{cases}$$

Câu III. (2 điểm)

1) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^3 - y^3 - 2y^2 - 3y - 1 = 0$

2) Tìm số nguyên tố p để $2041 - p^2$ không chia hết cho 24

Câu IV. (3 điểm)

1) Cho đường tròn (O) đường kính AB , qua A và B lần lượt vẽ các tiếp tuyến d_1 và d_2 với (O) . Từ điểm M bất kỳ trên (O) vẽ tiếp tuyến với đường tròn, cắt d_1 tại C và cắt d_2 tại D . Kẻ MH vuông góc với AB tại H .

a) Chứng minh rằng: AD, BC, MH đồng quy tại trung điểm của MH .

b) Đường tròn (O') đường kính CD cắt đường tròn (O) tại E và F (E thuộc cung $\widehat{AM}$). Chứng minh EF đi qua trung điểm của MH

2) Cho tam giác ABC đều cạnh a . Điểm M di động trên đoạn BC . Vẽ ME vuông góc với AB tại E , MF vuông góc với AC tại F . Tính giá trị nhỏ nhất của đoạn EF theo a .

Câu V. (1 điểm)

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{(x+1)^2 + y^2 + 1}{xy + x + 4} + \frac{(y+1)^2 + z^2 + 1}{yz + y + 4} + \frac{(z+1)^2 + x^2 + 1}{zx + z + 4}$$

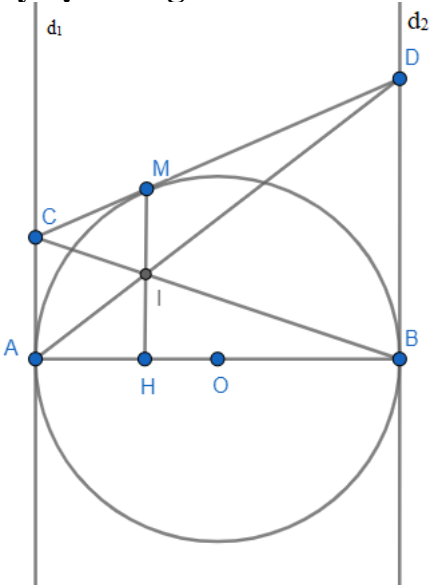
-----Hết-----

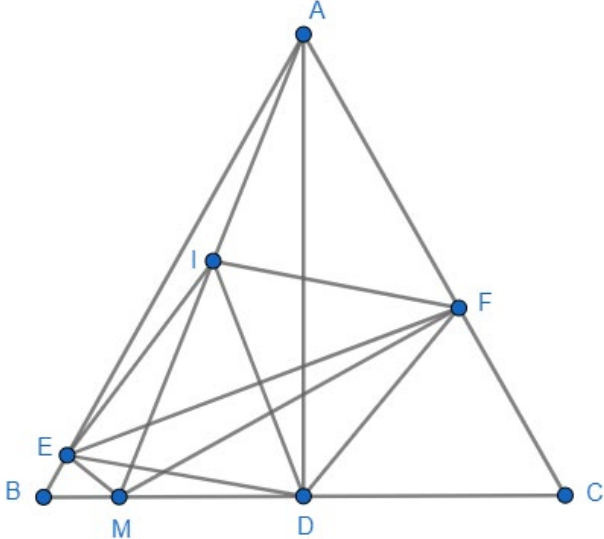
Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay

DỰ THẢO HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH TOÁN 9 SỞ GD&ĐT HẢI DƯƠNG 2022 - 2023

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
I	1	Cho $x = \frac{23}{\sqrt{31+12\sqrt{3}}}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x^4 + 5x^3 - 20x^2 - 27x + 30}{x^2 + 4x - 21}$	1.0
		$x = \frac{23}{\sqrt{31+12\sqrt{3}}} = \frac{23}{\sqrt{(3\sqrt{3}+2)^2}} = \frac{23}{3\sqrt{3}+2} = \frac{23(3\sqrt{3}-2)}{23} = 3\sqrt{3}-2$	0.25
		$\Rightarrow x+2 = 3\sqrt{3} \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 27 \Rightarrow x^2 + 4x - 23 = 0$	0.25
		$P = \frac{x^4 + 5x^3 - 20x^2 - 27x + 30}{x^2 + 4x - 21}$ $P = \frac{x^2(x^2 + 4x - 23) + x(x^2 + 4x - 23) - (x^2 + 4x - 23) + 7}{(x^2 + 4x - 23) + 2}$ $P = \frac{(x^2 + 4x - 23)(x^2 + x - 1) + 7}{(x^2 + 4x - 23) + 2}$	0.25
		$P = \frac{0 \cdot (x^2 + x - 1) + 7}{0 + 2} = \frac{7}{2}$	0.25
	2	Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c + 2\sqrt{abc} = 1$. Chứng minh rằng $\sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-c)(1-a)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} - \sqrt{abc} = 1$	1.0
		Do $a, b, c > 0$ và $a + b + c + 2\sqrt{abc} = 1$ $\Rightarrow a + 2\sqrt{abc} + bc = 1 - b - c + bc = (1-b)(1-c)$	0.25
		$\Rightarrow \sqrt{a(1-b)(1-c)} = \sqrt{a^2 + 2a\sqrt{abc} + abc} = \sqrt{(a + \sqrt{abc})^2} = a + \sqrt{abc}$	0.25
		Tương tự: $\Rightarrow \sqrt{b(1-c)(1-a)} = b + \sqrt{abc};$ $\sqrt{c(1-a)(1-b)} = c + \sqrt{abc}$	0.25
		Do đó: $\sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-c)(1-a)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} - \sqrt{abc}$ $= a + b + c + 2\sqrt{abc} = 1$	0.25
II	1	Giải phương trình $x^3 + x^2 - x + 1 = \sqrt{3x+1}$	1.0
		Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{3}$ $x^3 + x^2 - x + 1 = \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x + (x+1) - \sqrt{3x+1} = 0$	0.25
		$\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x + \frac{(x+1)^2 - (3x+1)}{x+1+\sqrt{3x+1}} = 0$	0.25
		$\Leftrightarrow (x^2 - x)(x+2) + \frac{x^2 - x}{x+1+\sqrt{3x+1}} = 0$	0.25

III		$\Leftrightarrow (x^2 - x) \left(x + 2 + \frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}} \right) = 0 \quad (*)$	
		Với $x \geq -\frac{1}{3}$ thì $x + 2 + \frac{1}{(x+1)+\sqrt{3x+1}} > 0$ nên $(*) \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \quad (\text{t/m})$ Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{0;1\}$	0.25
	2	Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + 2x - y = 3 \\ \frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{y^2 + 4y + 7} = 1 \end{cases}$	1.0
		Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y+2) = 1 \\ \frac{1}{(x-1)^2 + 1} + \frac{2}{(y+2)^2 + 3} = 1 \end{cases}$	0.25
		Đặt $u = x-1, v = y+2$. Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} uv = 1 \\ \frac{1}{u^2 + 1} + \frac{2}{v^2 + 3} = 1 \end{cases}$	0.25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} uv = 1 \\ u^2 v^2 + 3u^2 + v^2 + 3 = 2u^2 + v^2 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 1 \\ u^2 v^2 + u^2 = 2 \end{cases}$	0.25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} uv = 1 \\ u = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v = 1 \\ u = v = -1 \end{cases}$	0.25
		Từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$ Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$	0.25
	1	Giải phương trình nghiệm nguyên $x^3 - y^3 - 2y^2 - 3y - 1 = 0$	1.0
		Phương trình đã cho tương đương với $x^3 = y^3 + 2y^2 + 3y + 1$ Nhận xét rằng: $y^2 \geq 0 \Rightarrow x^3 \leq y^3 + 2y^2 + 3y + 1 + y^2 = (y+1)^3 \quad (1)$ $5y^2 + 2 > 0 \Rightarrow x^3 > y^3 + 2y^2 + 3y + 1 - (5y^2 + 2) = (y-1)^3 \quad (2)$ Từ (1) và (2) suy ra: $(y-1)^3 < x^3 \leq (y+1)^3$	0.25
		Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = y^3 \\ x^3 = (y+1)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 + 2y^2 + 3y + 1 = y^3 \\ y^3 + 2y^2 + 3y + 1 = (y+1)^3 \end{cases}$	0.25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 3y + 1 = 0 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \text{ (do } y \in \mathbb{Z}) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 0 \end{cases}$	0.25
		Với $y = -1 \Rightarrow x = -1$ Với $y = 0 \Rightarrow x = 1$ Vậy phương trình có 2 cặp nghiệm nguyên là $(-1; -1)$ và $(1; 0)$	0.25
		Tìm số nguyên tố p để $2041 - p^2$ không chia hết cho 24	1.0
		Đặt $a = 2041 - p^2 = 2040 - (p^2 - 1) = 2040 - (p-1)(p+1)$	0.25

		Nếu $p = 2 \Rightarrow a = 2037$ không chia hết cho 24 $\Rightarrow p = 2$ (nhận)	0.25
		Nếu $p = 3 \Rightarrow a = 2032$ không chia hết cho 24 $\Rightarrow p = 3$ (nhận)	
		Nếu $p > 3$ mà p là số nguyên tố. Do đó p^2 chia cho 3 dư 1 $\Rightarrow p^2 - 1 : 3$	
		$p > 3$ mà p là số nguyên tố. Do đó p lẻ nên $p - 1$ và $p + 1$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (p - 1)(p + 1) : 8$. Mà $(3; 8) = 1 \Rightarrow (p - 1)(p + 1) : 24$	
		$\Rightarrow a = 2040 - (p - 1)(p + 1) : 24$ Do đó $p > 3$ không thỏa mãn điều kiện đề bài. Vậy $p = 2; p = 3$	
IV	1a	Cho đường tròn (O) đường kính AB, qua A và B lần lượt vẽ các tiếp tuyến d_1 và d_2 với (O). Từ điểm M bất kỳ trên (O) vẽ tiếp tuyến với đường tròn, cắt d_1 tại C và cắt d_2 tại D. Kẻ MH vuông góc với AB tại H. Chứng minh rằng: AD, BC, MH đồng quy tại trung điểm của MH. 	1.0
		Gọi giao điểm của AD và BC là I . Ta có $\triangle ICA \sim \triangle IBD \Rightarrow \frac{IC}{IB} = \frac{CA}{BD} = \frac{CM}{DM} \Rightarrow MI \parallel BD \Rightarrow MI \perp AB$	
		Mà $MH \perp AB \Rightarrow I \in MH$	
		Chứng minh được: $\frac{MI}{BD} = \frac{CI}{CB} = \frac{AI}{AD} = \frac{IH}{BD}$	
		$\Rightarrow MI = IH$ hay I trung điểm MH Vậy AD, BC, MH đồng quy tại trung điểm của MH	
	1b	Đường tròn (O') đường kính CD cắt đường tròn (O) tại E và F (E thuộc cung $\widehat{AM}$). Chứng minh EF đi qua trung điểm của MH	1.0

			
		Kẻ đường cao AD của tam giác ABC. Lấy I là trung điểm AM AD là đường cao đồng thời là phân giác $\Rightarrow \widehat{BAD} = 30^\circ$ Chứng minh được $\widehat{EID} = 60^\circ, \widehat{EIF} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{DIF} = 60^\circ$	0.25
		Chứng minh $EI = DI = FI = \frac{1}{2} AM$, mà $\widehat{EID} = \widehat{DIF} = 60^\circ$ Suy ra tam giác EID và FID là tam giác đều và EIFD là hình thoi	0.25
		Chứng minh được $EF = ID\sqrt{3}$	0.25
		Vậy EF ngắn nhất khi và chỉ khi ID ngắn nhất ID ngắn nhất khi và chỉ khi AM ngắn nhất $\Rightarrow AM$ là đường cao Khi đó $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ID = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow EF = \frac{3a}{4}$	0.25
V		Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{(x+1)^2 + y^2 + 1}{xy + x + 4} + \frac{(y+1)^2 + z^2 + 1}{yz + y + 4} + \frac{(z+1)^2 + x^2 + 1}{zx + z + 4}$	1.0
		Ta có $\frac{(x+1)^2 + y^2 + 1}{xy + x + 4} = \frac{x^2 + y^2 + 2x + 2}{xy + x + 4}$ $\geq \frac{2xy + 2x + 2}{xy + x + 4} = \frac{2(xy + x + 4) - 6}{xy + x + 4} = 2 - \frac{6}{xy + x + 4}$ Tương tự, suy ra $P \geq 6 - 6\left(\frac{1}{xy + x + 4} + \frac{1}{yz + y + 4} + \frac{1}{zx + z + 4}\right)$	0.25
		Ta có $\frac{1}{xy + x + 4} = \frac{1}{xy + x + 1 + 3} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{xy + x + 1} + \frac{1}{3}\right)$ Tương tự, suy ra $P \geq 6 - 6 \cdot \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{xy + x + 1} + \frac{1}{yz + y + 1} + \frac{1}{zx + z + 1}\right)$	0.25
		Mặt khác	0.25

	$\frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1} = \frac{1}{xy+x+1} + \frac{xyz}{yz+y+xyz} + \frac{xyz}{zx+z+xyz}$ $= \frac{1}{xy+x+1} + \frac{xz}{z+1+xz} + \frac{xy}{x+1+xy} = \frac{1}{xy+x+1} + \frac{xz}{z+xyz+xz} + \frac{xy}{x+1+xy}$ $= \frac{1}{xy+x+1} + \frac{x}{1+xy+x} + \frac{xy}{x+1+xy} = 1$	
	$\Rightarrow P \geq 6 - 6 \cdot \frac{1}{4}(1+1) = 6 - 3 = 3$	0.25

(Lưu ý: Học sinh có cách giải đúng khác cũng cho điểm tối đa)

Câu I. (2,0 điểm)

1) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 6$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 4$.

Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{a}}{a+5} + \frac{\sqrt{b}}{b+5} + \frac{\sqrt{c}}{c+5} = \frac{10}{\sqrt{(a+5)(b+5)(c+5)}}$.

2) Cho $f(x) = \frac{x^3}{1-3x+3x^2}$. Hãy tính giá trị của biểu thức sau:

$$A = f\left(\frac{1}{2022}\right) + f\left(\frac{2}{2022}\right) + \dots + f\left(\frac{2020}{2022}\right) + f\left(\frac{2021}{2022}\right)$$

Câu II. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $3x^2 + 6x - 3 = \sqrt{\frac{x+7}{3}}$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$$

Câu III. (2,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $8x^2y^2 + x^2 + y^2 = 10xy$.

2) Cho $p; x; y$ là các số tự nhiên thỏa mãn $px^2 + x = (p+1)y^2 + y$.

Chứng minh rằng $px + py + 1$ là số chính phương.

Câu IV. (3,0 điểm)

1) Cho đường tròn tâm O , bán kính R . Điểm A nằm bên ngoài đường tròn tâm O . Qua A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC ; H là giao điểm của AO với BC . Lấy điểm E bất kì trên đường tròn (E khác B và C). Qua E vẽ tiếp tuyến với đường tròn tâm O , tiếp tuyến này cắt đường thẳng MN tại K .

a) Chứng minh rằng: $MN^2 = AH \cdot HO$;

b) Chứng minh rằng: $KA = KE$.

2) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AO với BC , BO với AC , CO với AB .

Chứng minh rằng: $AD + BE + CF \geq \frac{9R}{2}$.

Câu V. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \frac{a^2 + b^2 + 2}{a + b - ab} + \frac{a^2 + c^2 + 2}{a + c - ac} + \frac{c^2 + b^2 + 2}{c + b - cb}$.

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Cán bộ coi thi số 1:..... Cán bộ coi thi số 2:.....

Lưu ý: Thí sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa. Điểm bài thi làm tròn đến 0,25đ.

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
I	1	Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 6$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 4$. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{a}}{a+5} + \frac{\sqrt{b}}{b+5} + \frac{\sqrt{c}}{c+5} = \frac{10}{\sqrt{(a+5)(b+5)(c+5)}}$	1,0
		Ta có $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 4 \Leftrightarrow a + b + c + 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) = 16 \Rightarrow \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 5$ Do đó: $a + 5 = a + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c})$	0,25
		Tương tự ta có: $b + 5 = b + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = (\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{a})$ $c + 5 = c + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = (\sqrt{c} + \sqrt{a})(\sqrt{c} + \sqrt{b})$	0,25
		Suy ra: $\frac{\sqrt{a}}{a+5} + \frac{\sqrt{b}}{b+5} + \frac{\sqrt{c}}{c+5} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c})} + \frac{\sqrt{b}}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{a})} + \frac{\sqrt{c}}{(\sqrt{c} + \sqrt{a})(\sqrt{c} + \sqrt{b})}$ $= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{b} + \sqrt{c}) + \sqrt{b}(\sqrt{c} + \sqrt{a}) + \sqrt{c}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{c} + \sqrt{a})}$	0,25
		$= \frac{2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})}{\sqrt{(a+5)(b+5)(c+5)}} = \frac{10}{\sqrt{(a+5)(b+5)(c+5)}}$ Vậy $\frac{\sqrt{a}}{a+5} + \frac{\sqrt{b}}{b+5} + \frac{\sqrt{c}}{c+5} = \frac{10}{\sqrt{(a+5)(b+5)(c+5)}}$	0,25
	2	Cho $f(x) = \frac{x^3}{1-3x+3x^2}$. Hãy tính giá trị của biểu thức sau: $A = f\left(\frac{1}{2022}\right) + f\left(\frac{2}{2022}\right) + \dots + f\left(\frac{2020}{2022}\right) + f\left(\frac{2021}{2022}\right)$	1,0
		Nhận xét: với $x + y = 1$ thì $f(x) + f(y) = 1$. Thật vậy, ta có $f(x) = \frac{x^3}{x^3 + (1-x)^3} \Rightarrow f(y) = f(1-x) = \frac{(1-x)^3}{x^3 + (1-x)^3}$ Suy ra $f(x) + f(y) = f(x) + f(1-x) = \frac{x^3}{x^3 + (1-x)^3} + \frac{(1-x)^3}{x^3 + (1-x)^3} = 1$.	0,25
		Ta có $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.	0,25
		Theo nhận xét trên ta có:	

		$A = \left(f\left(\frac{1}{2022}\right) + f\left(\frac{2021}{2022}\right) \right) + \left(f\left(\frac{2}{2022}\right) + f\left(\frac{2020}{2022}\right) \right) + \dots +$ $\left(f\left(\frac{1010}{2022}\right) + f\left(\frac{1012}{2022}\right) \right) + f\left(\frac{1011}{2022}\right)$	0,25
		$A = 1010 + f\left(\frac{1}{2}\right) = 1010,5$	0,25
II	1	Giải phương trình: $3x^2 + 6x - 3 = \sqrt{\frac{x+7}{3}}$	1,0
		Điều kiện: $x \geq -7$. $3x^2 + 6x - 3 = \sqrt{\frac{x+7}{3}} \Leftrightarrow 3(x+1)^2 = \sqrt{\frac{x+7}{3}} + 6 \quad (2)$ Đặt $y+1 = \sqrt{\frac{x+7}{3}} \geq 0 \Rightarrow 3(y+1)^2 = x+7$. Từ (2) ta có: $3(x+1)^2 = y+7$	0,25
		Ta có: $\begin{cases} 3(x+1)^2 = y+7 \\ 3(y+1)^2 = x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x - y - 4 = 0 \\ 3y^2 + 6y - x - 4 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow 3(x^2 - y^2) + 7(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(3x + 3y + 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = \frac{-7}{3} - x \end{cases}$	0,25
		TH1: $y = x \Rightarrow \sqrt{\frac{x+7}{3}} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x^2 + 5x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{73} - 5}{6}$	0,25
		TH2: $y = -\frac{7}{3} - x \Rightarrow \sqrt{\frac{x+7}{3}} = -\frac{4}{3} - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{-4}{3} \\ 9x^2 + 21x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{69} - 7}{6}$	0,25
		Vậy tập nghiệm của pt là: $S = \left\{ \frac{\sqrt{73} - 5}{6}; \frac{-\sqrt{69} - 7}{6} \right\}$	
	2	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$	1,0
		$y = 0$ không thỏa mãn hệ. $y \neq 0$ $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} = 7 \\ x^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{x}{y} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} = 7 \\ \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} = 13 \end{cases}$	0,25
		Đặt $\begin{cases} a = x + \frac{1}{y} \\ b = \frac{x}{y} \end{cases}$ Ta có: $\begin{cases} a + b = 7 \\ a^2 - b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 - a \\ a^2 + a - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \\ a = -5 \\ b = 12 \end{cases}$	0,25

		Với $\begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{y}=4 \\ \frac{x}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ 3y^2-4y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{3} \\ x=3 \\ y=1 \end{cases}$	0,25
		Với $\begin{cases} a=-5 \\ b=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{y}=-5 \\ \frac{x}{y}=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12y \\ 12y^2+5y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ y \in \emptyset \end{cases}$ Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) \in \left\{ \left(1; \frac{1}{3}\right), (3; 1) \right\}$	0,25
III	1	Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $8x^2y^2 + x^2 + y^2 = 10xy$.	1,0
		$8x^2y^2 + x^2 + y^2 = 10xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 8xy - 8x^2y^2$ $\Leftrightarrow (x-y)^2 = 8xy(1-xy)$	0,25
		Ta có $(x-y)^2 \geq 0$ với mọi x, y suy ra $8xy(1-xy) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq xy \leq 1$	
		Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} xy=0 \\ xy=1 \end{cases}$	0,25
		Nếu $xy=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=0(tm) \\ y=0 \Rightarrow x=0(tm) \end{cases}$	0,25
		Nếu $xy=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1(tm) \\ x=y=-1(tm) \end{cases}$	0,25
		Vậy các cặp số nguyên (x;y) cần tìm là (0;0), (-1;-1), (1;1).	
	2	Cho $p; x; y$ là các số tự nhiên thỏa mãn $px^2 + x = (p+1)y^2 + y$. Chứng minh rằng $px + py + 1$ là số chính phương.	1,0
		$px^2 + x = (p+1)y^2 + y \Leftrightarrow p(x^2 - y^2) + x - y = y^2 \Leftrightarrow (x-y)(px + py + 1) = y^2$	0,25
		Đặt $d = (x-y, px + py + 1), (d \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow \begin{cases} x-y : d \\ px + py + 1 : d \end{cases}$	0,25
		Vì $(x-y)(px + py + 1) = y^2 \Rightarrow y^2 : d^2 \Rightarrow y : d$ Mà $x-y : d \Rightarrow x : d \Rightarrow px + py : d$ Vì $px + py + 1 : d \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$	0,25
		Vậy $x-y$ và $px + py + 1$ là các số nguyên tố cùng nhau, mà $(x-y)(px + py + 1)$ là số chính phương nên $px + py + 1$ là số chính phương.	0,25
IV	1	Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Điểm A nằm bên ngoài đường tròn tâm O. Qua A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC; H là giao điểm của AO với BC. Lấy điểm E bất kì trên đường tròn (E khác B và C). Qua E vẽ tiếp tuyến với đường tròn tâm O, tiếp tuyến này cắt đường thẳng MN tại K. a) Chứng minh rằng : $MN^2 = AH.HO$; b) Chứng minh rằng : $KA = KE$.	2,0

		0,25
a)	Ta có $\triangle ABC$ cân tại A suy ra $AB = AC$ $\triangle OBC$ cân tại O suy ra $OB = OC$ Suy ra AO là đường trung trực của BC suy ra $AO \perp BC$ tại H và H là trung điểm của BC.	0,25
	Xét $\triangle ABO$ vuông tại B có đường cao BH nên $AH \cdot HO = BH^2 = \frac{BC^2}{4}$.	0,25
	Vì MN là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $MN = \frac{BC}{2} \Rightarrow MN^2 = \frac{BC^2}{4}$. Do đó $MN^2 = AH \cdot HO$.	0,25
b)	Chứng minh rằng : $KA = KE$	
	Xét tam giác vuông KEO có $KE^2 = KO^2 - OE^2 = KO^2 - R^2$ (1) Vì $MN \parallel BC, BC \perp AO \Rightarrow MN \perp AO$.	0,25
	Gọi I là giao điểm của MN và AO thì I là trung điểm AH, ta có: $KA^2 = KI^2 + IA^2 = KO^2 - OI^2 + IA^2 = KO^2 + (AI + OI)(AI - OI) = KO^2 - AO(OI - AI)$	0,25
	$\Rightarrow KA^2 = KO^2 - AO \cdot (OI - IH) = KO^2 - AO \cdot OH = KO^2 - OB^2 = KO^2 - R^2$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $KE^2 = KA^2 \Rightarrow KE = KA$	0,25
2	Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AO với BC, BO với AC, CO với AB. Chứng minh rằng : $AD + BE + CF \geq \frac{9R}{2}$.	1,0
	Kẻ OK và AH lần lượt vuông góc với BC (K, H thuộc BC). Ta có: $\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}OK \cdot BC}{\frac{1}{2}AH \cdot BC} = \frac{OK}{AH}$	

		Mà AH // OK nên $\Rightarrow \frac{OK}{AH} = \frac{OD}{AD} \Rightarrow \frac{OD}{AD} = \frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta ABC}} \Rightarrow \frac{AD - AO}{AD} = \frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta ABC}} \Rightarrow \frac{AO}{AD} = 1 - \frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta ABC}}$	0,25
		Tương tự ta có: $\frac{BO}{BE} = 1 - \frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta ABC}}; \frac{CO}{CF} = 1 - \frac{S_{\Delta BOA}}{S_{\Delta ABC}}$	0,25
		Suy ra: $\frac{OA}{AD} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = 3 - \frac{S_{\Delta AOC} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta ABC}} = 3 - 1 = 2 \Rightarrow \frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{R}$	0,25
		Ta có: $(AD + BE + CF) \left(\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} \right) \geq 9 \Rightarrow AD + BE + CF \geq \frac{9R}{2}$	0,25
		Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \frac{a^2 + b^2 + 2}{a + b - ab} + \frac{a^2 + c^2 + 2}{a + c - ac} + \frac{c^2 + b^2 + 2}{c + b - cb}$.	1,0
		Ta có: $\frac{a^2 + b^2 + 2}{a + b - ab} = \frac{a^2 + 1 + b^2 + 1}{(a + b)(a + b + c) - ab} = \frac{a^2 + 1}{a^2 + b^2 + ab + ac + bc} + \frac{b^2 + 1}{a^2 + b^2 + ab + ac + bc}$ Tương tự: $\frac{a^2 + c^2 + 2}{a + c - ac} = \frac{a^2 + 1}{a^2 + c^2 + ab + ac + bc} + \frac{c^2 + 1}{a^2 + c^2 + ab + ac + bc}$ $\frac{b^2 + c^2 + 2}{b + c - bc} = \frac{b^2 + 1}{b^2 + c^2 + ab + ac + bc} + \frac{c^2 + 1}{b^2 + c^2 + ab + ac + bc}$	0,25
		Suy ra $S = \frac{a^2 + 1}{a^2 + b^2 + ab + ac + bc} + \frac{b^2 + 1}{a^2 + b^2 + ab + ac + bc} + \frac{a^2 + 1}{a^2 + c^2 + ab + ac + bc}$ $+ \frac{c^2 + 1}{a^2 + c^2 + ab + ac + bc} + \frac{b^2 + 1}{b^2 + c^2 + ab + ac + bc} + \frac{c^2 + 1}{b^2 + c^2 + ab + ac + bc}$	0,25
V		Áp dụng: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y} \quad \forall x, y > 0.$ Ta có: $\frac{a^2 + 1}{a^2 + b^2 + ab + ac + bc} + \frac{a^2 + 1}{a^2 + c^2 + ab + ac + bc} \geq \frac{4(a^2 + 1)}{2a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}$ $= \frac{4(a^2 + 1)}{a^2 + (a + b + c)^2} = \frac{4(a^2 + 1)}{a^2 + 1} = 4.$	0,25
		Tương tự ta có: $\frac{b^2 + 1}{a^2 + b^2 + ab + ac + bc} + \frac{b^2 + 1}{b^2 + c^2 + ab + ac + bc} \geq 4$ $\frac{c^2 + 1}{a^2 + c^2 + ab + ac + bc} + \frac{c^2 + 1}{b^2 + c^2 + ab + ac + bc} \geq 4$ Suy ra $S \geq 12$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng 12 khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.	0,25