

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu I (4,0 điểm)

1. Cho $a = \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ và $b = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$

Chứng minh rằng $a + b$ và $a.b$ là một số tự nhiên.

2. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \sqrt{29+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}} - \sqrt{2}(5+\sqrt{2})$$

Câu II (5,0 điểm)

1. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{3x+2}$.

a) Tìm tập xác định của hàm số đã cho.

b) Tìm giá trị của x để $f(x) = 2$.

c) Chứng minh hàm số $f(x)$ đồng biến trên tập xác định của nó.

2. Cho biểu thức $Q = \frac{10\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}-4} - \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+4} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

a) Rút gọn Q .

b) Chứng minh $Q > -3$ với mọi x thuộc tập xác định.

Câu III (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6$

2. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $x^2 - 2y^2 = 1$

Câu IV (6,0 điểm)

1. Cho tam giác nhọn ABC , $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

2. Cho nửa đường tròn (O) đường kính BC . Trên tia đối của tia CB lấy điểm A , qua A kẻ tiếp tuyến AF với đường tròn (O) (F là tiếp điểm). Tia AF cắt tia tiếp tuyến Bx của nửa đường tròn (O) tại D (tia tiếp tuyến Bx nằm trong nửa mặt phẳng bờ BC chứa nửa đường tròn (O)). Gọi H là giao điểm của BF với DO ; K là giao điểm thứ hai của DC với nửa đường tròn (O) .

a) Chứng minh rằng $AO \cdot AB = AF \cdot AD$.

b) Chứng minh $\widehat{DHK} = \widehat{DCO}$.

c) Kẻ OM vuông góc với BC (M thuộc đoạn AD). Chứng minh rằng $\frac{BD}{DM} - \frac{DM}{AM} = 1$.

Câu V (1,0 điểm)

Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn điều kiện $3x + y \leq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức $A = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$

.....**Hết**.....

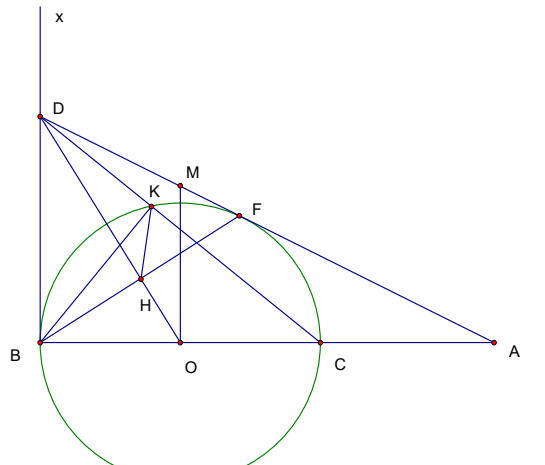
Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

I) HƯỚNG DẪN CHUNG.

- Thí sinh làm bài theo cách khác đáp án, nếu đúng thì cho điểm tương đương.
- Việc chi tiết điểm số (nếu có) so với biểu điểm phải được thống nhất trong Hội đồng chấm. Bài hình nếu hình vẽ không khớp với CM, hoặc không vẽ hình thì không chấm.
- Sau khi cộng điểm toàn bài, điểm lẻ đến 0,25 điểm.

II) ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM CHẤM.

Câu	Nội dung	Điểm
Câu I (2,0đ)		
1 (2,0 điểm)	$\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = 2+\sqrt{3}$	0,5
	$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3}$	0,5
	$\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 4$ là một số tự nhiên	0,5
	$\sqrt{7+4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{7-4\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$ là một số tự nhiên	0,5
2 (2,0 điểm)	$A = \sqrt{29+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}} - \sqrt{2}(5+\sqrt{2}) = \sqrt{29+30\sqrt{2+\sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2}}} - 5\sqrt{2} - 2$	0,25
	$= \sqrt{29+30\sqrt{2+\sqrt{3+2\sqrt{2}}}} - 5\sqrt{2} - 2 = \sqrt{29+30\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}} - 5\sqrt{2} - 2 =$	0,5
	$= \sqrt{29+30\sqrt{2}} + 30 - 5\sqrt{2} - 2 = \sqrt{59+30\sqrt{2}} - 5\sqrt{2} - 2$	0,5
	$= \sqrt{(5\sqrt{2}+3)^2} - 5\sqrt{2} - 2 = 5\sqrt{2} + 3 - 5\sqrt{2} - 2 = 1$	0,75
Câu II 1 (3,0đ)	a) Hàm số $y=f(x)=\sqrt{3x+2}$ xác định $\Leftrightarrow 3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$	0,5
	b) $f(x)=2 \Leftrightarrow \sqrt{3x+2}=2 \Leftrightarrow 3x+2=4 \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$	0,5
	$x=\frac{2}{3}$ thỏa mãn ĐKXD. Vậy với $x=\frac{1}{3}$ thì $f(x)=2$	0,5
	c) Với $-\frac{2}{3} \leq x_1 \leq x_2$ Ta có: $f(x_2)-f(x_1)=\sqrt{3x_2+2}-\sqrt{3x_1+2}$	0,5
	$= \frac{(3x_2+2)-(3x_1+2)}{\sqrt{(3x_2+2)}+\sqrt{(3x_1+2)}} = \frac{3(x_2-x_1)}{\sqrt{(3x_2+2)}+\sqrt{(3x_1+2)}}$	0,5
	Vì $x_2 > x_1$ nên $x_2-x_1 > 0$ do đó $f(x_2)-f(x_1) > 0$	0,25
	$\Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$ nên hàm số đã cho đồng biến trên tập xác định của nó.	0,25
	a) $Q = \frac{10\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)} - \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+4} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$	0,25
	$= \frac{10\sqrt{x}-(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)} = \frac{10\sqrt{x}-3x-7}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)} = \frac{7-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}$	0,75

Câu II 2 (2,0đ)	b) Xét hiệu $Q - (-3) = Q + 3 = \frac{19}{\sqrt{x+4}} > 0$ tức là $Q > -3$ Với $x \geq 0; x \neq 1$ (1)	1,0
Câu III (4,0đ)	$(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6$ (1)	
1 (2,0 điểm)	(1) $\Leftrightarrow x^2+5x+4 - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6$ (2)	0,25
	đặt $\sqrt{x^2+5x+2} = t; t \geq 0$	0,25
	(2) trở thành: $t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 4 \end{cases}$	0,5
	$t = -1$ (loại), $t = 4$ ta được $\sqrt{x^2+5x+2} = 4 \Leftrightarrow x^2+5x-14 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (x-2)(x+7) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-7 \end{cases}$ Vậy pt có nghiệm là $x = 2$ hoặc $x = -7$	0,25
2 (2,0 điểm)	$x^2 - 2y^2 = 1$ (1)	
	Gọi a, b là một nghiệm của phương trình (1), ta có $a^2 - 2b^2 = 1$	0,25
	$(a - \sqrt{2}b)(a + \sqrt{2}b) = 1 \Leftrightarrow (a - \sqrt{2}b)^2 (a + \sqrt{2}b)^2 = 1$	0,25
	$(a^2 + 2b^2 - 2\sqrt{2}ab)(a^2 + 2b^2 + 2\sqrt{2}ab) = 1 \Leftrightarrow (a^2 + 2b^2)^2 - (2\sqrt{2}ab)^2 = 1$	0,25
	$(a^2 + 2b^2)^2 - (2\sqrt{2}ab)^2 = 1 \Leftrightarrow (a^2 + 2b^2)^2 - 2(2ab)^2 = 1$	0,25
	Suy ra $(a^2 + 2b^2; 2ab)$ là một nghiệm của pt (1)	0,25
	$\Rightarrow$ phương trình có nghiệm (a; b) thì có nghiệm tổng quát dạng $(a^2 + 2b^2; 2ab)$	0,25
	Nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của PT là (3;2)	0,25
	KL: pt có vô số nghiệm nguyên dương thoả mãn $(a^2 + 2b^2; 2ab)$ với (a,b) nhỏ nhất là (3;2).	0,25
	Nếu HS giải và tìm được nghiệm nguyên dương nhỏ nhất là (3;2) thì cho 1,0 điểm	
Câu IV (3,0đ)		
1 (1,5 điểm)	Vẽ đường cao CH của $\triangle ABC$, Vì $\triangle HAC$ vuông tại H, nên ta có $AH = AC \cdot \cos A$	0,25
	Theo Pitago ta có $AH^2 + HC^2 = AC^2$	0,25
	$\triangle HBC$ vuông tại H, nên Theo Pitago ta có $BC^2 = HB^2 + HC^2$	0,25
	$= (AB - AH)^2 + HC^2 = AB^2 - 2AB \cdot AH + AH^2 + HC^2$	0,5
	$= AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$. Vậy $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$	0,25
2 (4,5 điểm)		

	a) Vì AF, BD là tiếp tuyến của (O) nên $AF \perp OF$, $DB \perp AB$	0,5
	ΔAOF và ΔADB có $\widehat{AFO} = \widehat{ADB} = 90^\circ$, $\widehat{OAF}$ chung	0,5
	Suy ra $\Delta AOF \sim \Delta ADB$ (gg) $\Rightarrow \frac{AO}{AD} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow AO \cdot AB = AF \cdot AD$	0,5
	b) $DB = DF$ (t/c 2 tt cắt nhau), và $OB = OF =$ bán kính, nên OD là trung trực của BF $\Rightarrow OD \perp BF$	0,25
	ΔBKC có BC là đường kính của (O) nên $BK \perp KC$	0,25
	Áp dụng hệ thức lượng vào ΔDBO , đường cao BH ta có: $DB^2 = DH \cdot DO$ (1)	0,25
	Áp dụng hệ thức lượng vào ΔDBC , đường cao BK ta có: $DB^2 = DK \cdot DC$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow DH \cdot DO = DK \cdot DC \Rightarrow \frac{DH}{DK} = \frac{DC}{DO}$	0,25
	Xét ΔDHK và ΔDCO có $\widehat{HDK}$ chung, $\frac{DH}{DK} = \frac{DC}{DO}$ do đó $\Delta DHK \sim \Delta DCO$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DHK} = \widehat{DCO}$	0,25
	c) Ta có $OM \parallel DB$ (vì cùng vuông góc với BC) nên $\widehat{BDO} = \widehat{DOM}$ (so le trong)	0,25
	$\widehat{BDO} = \widehat{ODM}$ (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \widehat{DOM} = \widehat{ODM} \Rightarrow \Delta ODM$ cân tại M $\Rightarrow MD = MO$	0,5
	ΔADB có $OM \parallel DB$ nên theo định lý Ta-lét ta có $\frac{AD}{AM} = \frac{BD}{OM}$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{AD - AM}{AM} = \frac{BD - OM}{OM} \Leftrightarrow \frac{MD}{AM} = \frac{BD}{OM} - 1 \Leftrightarrow \frac{BD}{OM} - \frac{MD}{AM} = 1 \Leftrightarrow \frac{BD}{DM} - \frac{MD}{AM} = 1$	0,5
Câu V (1,0đ)	Chứng minh được BĐT phụ: Với hai số thực dương x và y ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$	0,25
	Dấu bằng xảy ra khi $x = y$ (1)	
	Áp dụng (1) ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq \frac{4}{x + \sqrt{xy}} \geq \frac{4}{x + \frac{x+y}{2}} \geq \frac{8}{3x+y} \geq 2$	0,5
	Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1$. Vậy $\text{Min} A = 2$	0,25
	Chú ý: HS có thể áp dụng trực tiếp BĐT Cauchy để làm.	