

Câu 1. (4,0 điểm): Cho biểu thức

$$M = \left[\frac{(a-1)^2}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2} + \frac{a^4+8a^2-4a+16}{a^2+4}$$

1. Rút gọn M. Tìm a để $M < 5a$.

2. Cho a, b, c đôi một khác nhau và khác 0. Cho $a + b + c = 0$

$$\text{Tính } N = \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \cdot \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} \right) + 1$$

Câu 2. (4,0 điểm):

1. Giải các phương trình: $x^3 + \frac{x^3}{(x-1)^3} + \frac{3x^2}{x-1} - 28 = 0$

2. Tìm hai số x; y thỏa mãn 2 điều kiện sau: $x^3 + xy^2 - 10y = 0$ và $x^2 + 6y^2 = 10$

Câu 3. (4,0 điểm):

1. Tìm số x, y nguyên thỏa mãn: $x^2y^2 - 3xy^3 - x^2 + 3xy - x^2y + 3xy^2 + 6y^2 - 6y - 7 = 0$

2. Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị, ta vẫn được một số chính phương.

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho đoạn thẳng AB cố định có O là trung điểm. Trên đường thẳng vuông góc với AB tại A, lấy điểm C sao cho $AC \geq AO$. Kẻ AK vuông góc CO tại K, điểm D đối xứng với A qua K. Đường thẳng qua O vuông góc với AB cắt BD tại E. Kẻ DH vuông góc với AB tại H, DH cắt BC tại I.

a. Chứng minh: $CD = EO$

b. Chứng minh: KI đi qua trung điểm của BD.

c. Kẻ IN vuông góc với AC tại N, kẻ DM vuông góc với AC tại M, DM cắt CO tại J. Chứng minh tứ giác JNOI là hình bình hành. Khi C di chuyển (sao cho $AC \geq AO$), Tính giá trị nhỏ nhất của $NI^2 + OJ^2$

Câu 5. (2,0 điểm): Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1}$

..... HẾT

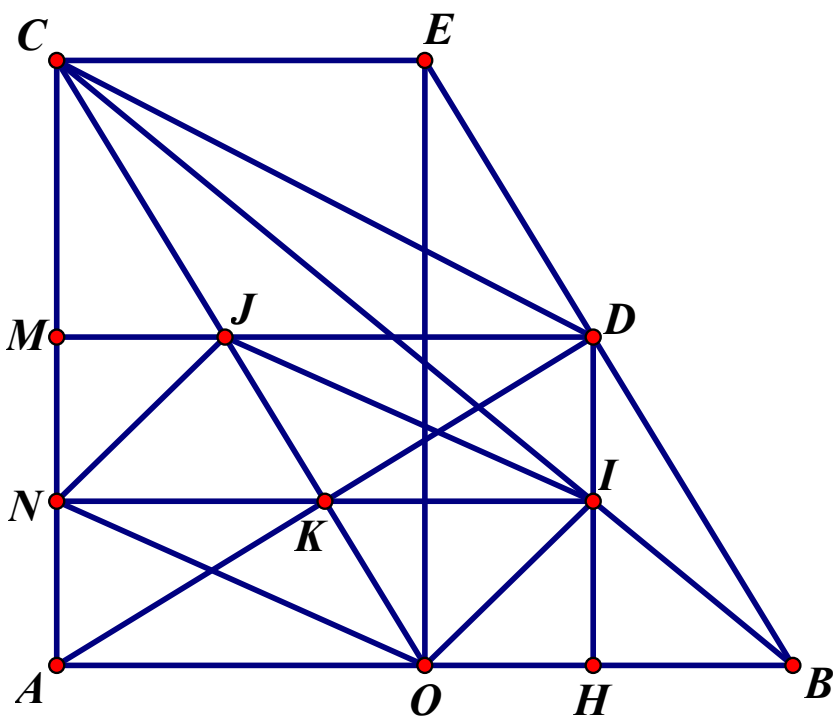
Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
Câu 1. (4,0 điểm)	Ý 1 (2.5đ) Điều kiện: $a \neq 0; a \neq 1$ * Ta có: $\left[\frac{(a-1)^2}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2} + \frac{a^4+8a^2-4a+16}{a^2+4}$ $M = \frac{4a}{a^2+4} + \frac{a^4+8a^2-4a+16}{a^2+4}$ Vậy với $a \neq 0; a \neq 1$ Thì $M = a^2+4$ * khi $M < 5a$ Ta có $a^2+4 < 5a \Leftrightarrow a^2-5a+4 < 0 \Leftrightarrow (a-1)(a-4) < 0 \Leftrightarrow 1 < a < 4$	1.5 1.0
	Ý 2. (1.5đ) Đặt $\frac{a-b}{c} = x; \frac{b-c}{a} = y; \frac{c-a}{b} = z \Rightarrow \frac{c}{a-b} = \frac{1}{x}; \frac{a}{b-c} = \frac{1}{y}; \frac{b}{c-a} = \frac{1}{z}$ Ta có $\Leftrightarrow N = (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + 1$ $N = (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + 1 = 4 + \left(\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} \right)$ Ta lại có: $\frac{y+z}{x} = \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \cdot \frac{c}{a-b} = \frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab} \cdot \frac{c}{a-b}$ $= \frac{c(a-b)(c-a-b)}{ab(a-b)} = \frac{c(c-a-b)}{ab} = \frac{c[2c-(a+b+c)]}{ab} = \frac{2c^2}{ab}$ Tương tự ta có $\frac{x+z}{y} = \frac{2a^2}{bc}; \frac{x+y}{z} = \frac{2b^2}{ac}$ $N = (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + 1 = 4 + \frac{2c^2}{ab} + \frac{2a^2}{bc} + \frac{2b^2}{ac} = 4 + \frac{2}{abc} (a^3+b^3+c^3)$ Vì $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$ Do đó $N = (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + 1 = 4 + \frac{2}{abc} \cdot 3abc = 4 + 6 = 10$ Vậy $N = 10$	0.5 0.5 0.5
Câu 2 (4,0 điểm)	Ý 1. (2đ) ĐK : $x \neq 1$ Ta có $x^3 + \frac{x^3}{(x-1)^3} + \frac{3x^2}{x-1} - 28 = 0$ $\left(x + \frac{x}{x-1}\right)^3 - 3x \cdot \frac{x}{x-1} \left(x + \frac{x}{x-1}\right) + \frac{3x^2}{x-1} - 28 = 0$ $\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^3 - 3\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 + \frac{3x^2}{x-1} - 1 - 27 = 0$ $\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1} - 1\right)^3 = 3^3$	0.5 0.5

	$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} - 1 = 3$ $\Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} = 4$ $\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0. \Leftrightarrow x=2 \text{ (TM)}$ Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=2$	0.5
	Ý 2(2điểm) Từ $10 = x^2 + 6y^2$. Thay vào $x^3 + xy^2 - 10y = 0$ ta có $x^3 + xy^2 - (x^2 + 6y^2)y = 0 \Leftrightarrow x^3 + xy^2 - x^2y - 6y^3 = 0$ $\Leftrightarrow x^3 - 2x^2y + x^2y - 2xy^2 + 3xy^2 - 6y^3 = 0 \Leftrightarrow (x-2y)(x^2 + xy + 3y^2) = 0$ $(x-2y)(x^2 + xy + 3y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x^2 + xy + 3y^2 = 0 \end{cases}$ + Trường hợp 1: $x^2 + xy + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{11y^2}{4} = 0 \Rightarrow x = y = 0$ Với $x = y = 0$ không thỏa mãn phương trình (2). + Trường hợp 2: $x = 2y$ thay vào phương trình (2) ta có: $4y^2 + 8y^2 = 12 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = -1 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$ Vậy $(x; y) \in \{(2; 1); (-2; -1)\}$.	0.5
	Ý 1. (2đ) Từ $x^2y^2 - 3xy^3 - x^2 + 3xy - x^2y + 3xy^2 + 6y^2 - 6y - 7 = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 - 3xy + 6)(y^2 - y - 1) = 1 = 1.1 = (-1)(-1)$ TH1: $x^2 - 3xy + 6 = 1(1)$ và $y^2 - y - 1 = 1(2)$ Giải (2) ta có $y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ hoặc $y = 1$ - Nếu $y = 2$ Thay vào (1) ta được $x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 5$ - Nếu $y = 1$ Thay vào (1) ta được $x^2 - 3x + 5 = 0$ vô nghiệm TH2: $x^2 - 3xy + 6 = -1(1)$ và $y^2 - y - 1 = -1(2)$ Giải (2) ta có $y^2 - y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ hoặc $y = 1$ - Nếu $y = 0$ Thay vào (1) ta được $x^2 + 7 = 0$ vô nghiệm - Nếu $y = 1$ Thay vào (1) ta được $x^2 - 3x + 7 = 0$ vô nghiệm Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x; y)$ là: $(1; 2); (5; 2)$	0.5
	Ý 2(2đ) Gọi $abcd$ là số phải tìm ($a, b, c, d \in \mathbb{N}, 0 \leq a, b, c, d \leq 9, a \neq 0$) Ta có: $\begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{(a+1)(b+3)(c+5)(d+3)} = m^2 \end{cases} \quad \text{với } k, m \in \mathbb{N}, 31 < k < m < 100$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{abcd} + 1353 = m^2 \end{cases}$ Do đó: $m^2 - k^2 = 1353$	0.5

Câu 3
(4,0 điểm)

	$\Rightarrow (m+k)(m-k) = 123.11 = 41.33 \quad (k+m < 200)$ $\Rightarrow \begin{cases} m+k = 123 \\ m-k = 11 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m+k = 41 \\ m-k = 33 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 67 \\ k = 56 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m = 37 \\ k = 4 \end{cases}$	0.5
	Kết luận đúng $\overline{abcd} = 3136$	0.5
Câu 4 (6,0 điểm)		
	a.(2d) Chứng minh được $CO \parallel BE$ (cùng vuông góc với AD) Chứng minh được : $\triangle ACO = \triangle OEB$ (cạnh huyền – góc nhọn) nên $AC = OE$. Mà $AC = CD$ (CO là trung trực của AD). Suy ra $CD = EO$.	0.5 1,0 0.5
	b.(2d) Do $IH \parallel AC$ nên $\frac{IH}{CA} = \frac{BH}{BA}$ Do $DH \parallel EO$ nên: $\frac{DH}{EO} = \frac{BH}{BO}$ Mà $\frac{BH}{BA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BH}{BO}$ nên $\frac{IH}{CA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DH}{EO}$. Mà $CA = EO$ Suy ra $IH = \frac{1}{2} DH$ hay I là trung điểm DH, mà K là trung điểm của AD nên	0.5 0.5 0.5 0.5

	IK// AB suy ra IK đi qua trung điểm của BD.	
	c.(2d) Do AMDH là hình chữ nhật và có I là trung điểm DH và IN vuông góc MA nên N là trung điểm AM và K là trung điểm AD nên I, K, N thẳng hàng. Chúng minh $\Delta JKD = \Delta OKA \rightarrow KJ = KO$ Chúng minh $\Delta NKA = \Delta IKD \rightarrow KN = KI$ Suy ra tứ giác NJIO là hình bình hành Chúng minh được NI = AH, JO = BD Ta có $NI^2 + JO^2 = AH^2 + BD^2$ Chúng minh được $BD^2 = BH \cdot AB$ nên : $NI^2 + JO^2 = AH^2 + BH \cdot AB = AH^2 + (AB - AH) \cdot AB = AH^2 - AB \cdot AH + AB^2$ $= \left(AH - \frac{1}{2} AB \right)^2 + \frac{3}{4} AB^2 \geq \frac{3}{4} AB^2$ Vậy GTNN của $NI^2 + JO^2$ là $\frac{3}{4} AB^2$ khi $AH = \frac{1}{2} AB$	0.5 0.25 0.25 0.25 0.25 0.5
Câu 5 (2,0 điểm)	Sử dụng bất đẳng thức Cô si Ta có: $\frac{a+1}{b^2+1} = a+1 - \frac{b^2(a+1)}{b^2+1} \geq a+1 - \frac{b^2(a+1)}{2b} = a+1 - \frac{b+ab}{2}$ (1) Tương tự: $\frac{b+1}{c^2+1} \geq b+1 - \frac{c+bc}{2}$ (2) và $\frac{c+1}{a^2+1} \geq c+1 - \frac{a+ca}{2}$ (3) Từ (1); (2) và (3) suy ra: $\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq \frac{a+b+c}{2} + 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}$ Mặt khác $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ hay $3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 = 9$ Do đó: $\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq \frac{a+b+c}{2} + 3 - \frac{ab+bc+ca}{2} = \frac{3}{2} + 3 - \frac{9}{6}$ Vậy $A = \frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$. GTNN A= 3 Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 1	1.0 0.5 0.5