

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN Ý YÊN ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI THCS
NĂM HỌC 2015 - 2016

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN : TOÁN – LỚP 7

Thời gian làm bài: 150 phút

Đề gồm 01 trang

Bài 1. (6 điểm)

1) Tính giá trị của biểu thức

$$A = (-1)^3 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)^2 \cdot (-7) \cdot \left(-\frac{1}{14}\right)$$

$$B = 2016 : \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} \cdot \frac{-1\frac{1}{6} + 0,875 - 0,7}{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}} \right)$$

2) Cho đa thức $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Biết $Q(x)$ chia hết cho 3 với mọi $x \in \mathbb{Z}$. Chứng tỏ các hệ số a, b, c, d đều chia hết cho 3.

Bài 2. (4 điểm)

1) Biết $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$ (với $a, b, c \neq 0$).

Chứng minh rằng: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

2) Số M được chia thành ba phần tỉ lệ nghịch với 3; 5; 6. Biết rằng tổng các lập phương của ba phần đó là 10728. Hãy tìm số M.

Bài 3. (6 điểm) Cho tam giác ABC đều. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $BD = \frac{1}{3}AB$. Tại D kẻ đường vuông góc với AB cắt cạnh BC tại E. Tại E kẻ đường vuông góc với BC cắt AC tại F.

1) Chứng minh $DF \perp AC$. Biết trong tam giác vuông cạnh đối diện với góc 30° thì bằng nửa cạnh huyền.

2) Chứng minh tam giác DEF đều.

3) Gọi G là trọng tâm của tam giác DEF. Chứng minh $GA = GB = GC$.

Bài 4. (2 điểm) Cho tam giác ABC, trung tuyến AM và BE cắt nhau tại G. Chứng minh rằng nếu $\widehat{AGB} \leq 90^\circ$ thì $AC + BC > 3AB$.

Bài 5. (2 điểm)

Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $C = \frac{22 - 3x}{4 - x}$ có giá trị lớn nhất.

Họ và tên thí sinh: Họ, tên chữ ký GT 1:

Số báo danh: Họ, tên chữ ký GT 2:

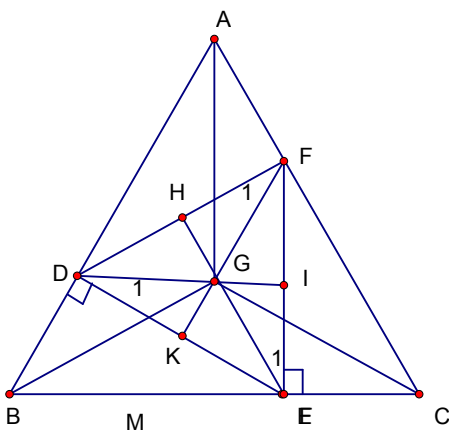
HƯỚNG DẪN CHẤM TOÁN 7

I. Hướng dẫn chung:

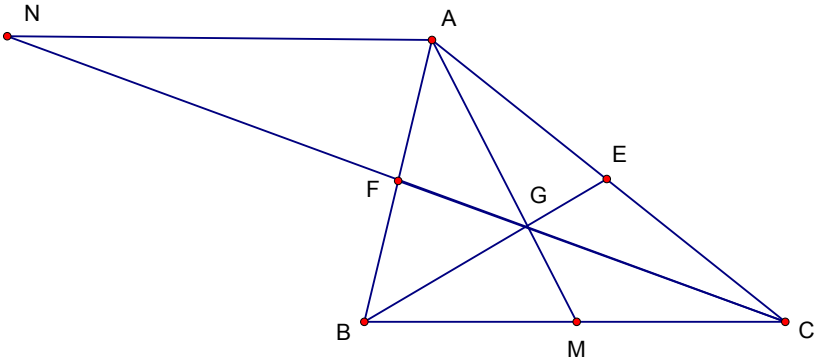
- 1) Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với các ý cơ bản học sinh phải trình bày, nếu học sinh giải theo cách khác mà đúng và đủ các bước thì vẫn cho điểm tối đa.
- 2) Điểm toàn bài là tổng điểm của các ý, các câu và không làm tròn.

II. Đáp án và thang điểm:

Bài	ý	Nội dung đáp án	Điểm
1 (6,0đ)	1) (4đ)	$A = (-1) \cdot \frac{(-7)^3}{8^3} \cdot \frac{(-2)^2}{7^2} \cdot \frac{1}{2}$	0,5
		$= \frac{(-1) \cdot (-7)^3 \cdot (-2)^2}{2^9 \cdot 7^2 \cdot 2}$	0,5
		$= \frac{(-1) \cdot (-7) \cdot (-1)}{2^8}$	0,5
		$= \frac{-7}{256}$	0,5
		Tính: *) $\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right)}{7 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right)}$	0,25
		$= \frac{2}{7} \text{ (vì } \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \neq 0)$	0,25
		*) $\frac{-1\frac{1}{6} + 0,875 - 0,7}{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}} = \frac{-7 \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10}\right)}{2 \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10}\right)}$	0,25
		$= \frac{-7}{2} \text{ (vì } \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} \neq 0)$	0,25
		$B = 2016 : \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{-7}{2}\right) = -2016$	1,0
	2) (2,0đ)	Cho đa thức $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	
		Vì $Q(x) \vdots 3$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$, nên Với $x = 0$, ta có $Q(0) = d \vdots 3$	0,5
		Với $x = 1$, ta có $Q(1) = a + b + c + d \vdots 3$ mà $d \vdots 3 \Rightarrow a + b + c \vdots 3$ (1)	0,25
		Với $x = -1$, ta có $Q(-1) = -a + b - c + d \vdots 3$ mà $d \vdots 3 \Rightarrow -a + b - c \vdots 3$ (2)	0,25
		$Q(1) + Q(-1) = 2b \vdots 3$ mà $(2; 3) = 1$ nên $b \vdots 3$	0,25
		$Q(1) - Q(-1) = 2(a + c) \vdots 3$ mà $(2; 3) = 1$ nên $a + c \vdots 3$ (3)	0,25
		Với $x = 2$, ta có $Q(2) = 8a + 4b + 2c + d \vdots 3$ hay $7a + (a + c) + 2b + d \vdots 3$	0,25

		Mà $d \vdots 3$, $a + c \vdots 3$, $b \vdots 3$ nên $7a \vdots 3$ mà $(7; 3) = 1 \Rightarrow a \vdots 3$ Từ (3) suy ra $c \vdots 3 \Rightarrow \text{đpcm}$	0,25
2 (4,0đ)	I (2,0đ)	Với $a, b, c \neq 0$, ta có $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c} = \frac{bza - cya}{a^2} = \frac{bcx - baz}{b^2} = \frac{acy - bcx}{c^2}$ $= \frac{bza - cya + bcx - baz + acy - bcx}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{0}{a^2 + b^2 + c^2} = 0$	0,25
		Suy ra $\frac{bz - cy}{a} = 0$, do đó $bz = cy \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (1)	0,5
		$\frac{cx - az}{b} = 0$, do đó $cx = az \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{c}$ (2)	0,5
		Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{c}{z}$	0,5
	2 (2,0đ)	Gọi ba phần được chia của số M là x, y, z , ta được $x + y + z = M$	0,25
		Theo đề bài ta có $x : y : z = \frac{1}{3} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6}$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 10728$ (1)	0,25
		Hay $\frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = k$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 10728$	0,25
		Suy ra $x^3 = 10^3 \cdot k^3$; $y^3 = 6^3 \cdot k^3$; $z = 5^3 \cdot k^3$	0,5
		Thay vào (1), được $1341k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$	0,25
		suy ra 20 ; $y = 12$; $z = 10$ Vậy $M = 42$.	0,5
3. (6,0đ)			
	1) (3,0đ)	$\triangle ABC$ đều nên $AB = AC = BC = a$ và $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$	0,25
		$BD = \frac{1}{3}a$ (gt) $\Rightarrow AD = \frac{2}{3}a$	0,25
		Xét $\triangle BDE$ vuông tại D có $\angle B = 60^\circ \Rightarrow \angle DEB = 30^\circ$	0,25

		Xét $\triangle BDE$ vuông tại D có $\angle DEB = 30^0 \Rightarrow BD = \frac{1}{2} BE$ hay $BE = 2 BD = 2 \cdot \frac{1}{3} a = \frac{2}{3} a$ mà $BC = a$ nên $EC = \frac{1}{3} a$	0,5
		Tương tự, xét $\triangle ECF$ vuông tại E có $\angle C = 60^0 \Rightarrow \angle EFC = 30^0$ $\Rightarrow AF = \frac{1}{3} a$	0,75
		Xét $\triangle ADF$ và $\triangle BED$ có: $AD = BE (= \frac{2}{3} a)$ $\angle A = \angle B (= 60^0)$ $AF = BD (= \frac{1}{3} a)$ $\Rightarrow \triangle ADF = \triangle BED$ (c. g. c)	0,5
		$\Rightarrow \angle AFD = \angle BDE$ (hai góc tương ứng) Mà $\angle BDE = 90^0 \Rightarrow \angle AFD = 90^0$ hay $DF \perp AC$	0,5
	2.. (1,5 đ)	*) Chứng minh tương tự cũng có $\triangle DBE = \triangle ECF$ (c.g.c) $\Rightarrow DE = EF$ (hai cạnh tương ứng)	0,5
		Có $\triangle ADF = \triangle BED$ (c. g. c) (cmt) $\Rightarrow DF = DE$ (hai cạnh tương ứng)	0,5
		$\Rightarrow DE = DF = EF \Rightarrow \triangle DEF$ là tam giác đều.	0,5
	3) (1,5 đ)	Xét $\triangle DEF$ đều có G là trọng tâm của tam giác $\Rightarrow G$ là giao điểm của ba đường phân giác $\Rightarrow GD, GE, GF$ là các đường phân giác của các góc $\angle EDF; \angle DEF; \angle DFE$	0,25
		Có $\triangle DEF$ đều nên $\angle D = \angle E = \angle F = 60^0$ $\Rightarrow \angle D_1 = \angle E_1 = \angle F_1 = 30^0$ (cùng bằng nửa góc $\angle D, \angle E, \angle F = 60^0$)	0,25
		Suy ra $\angle BDG = 90^0 + 30^0 = 120^0$ $\angle CEG = 90^0 + 30^0 = 120^0$ $\angle AFG = 90^0 + 30^0 = 120^0$	0,25
		Xét $\triangle DEF$ đều có G là trọng tâm của tam giác $\Rightarrow G$ là giao điểm của ba đường trung trực $\Rightarrow GD = GE = GF$	0,25
		*) Xét $\triangle AGF$ và $\triangle BGD$ có $GF = GD$	0,25

	$\angle AFG = \angle BDG (= 120^0)$ $AF = BD$ $\Rightarrow \triangle AGF = \triangle BGD$ (c. g. c) $\Rightarrow GA = GB$ (hai cạnh tương ứng) Tương tự, có $\triangle AGF = \triangle CGE$ (c. g. c) $\Rightarrow AG = GC$ (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow AG = BG = CG$ (đpcm)	0,25
		
4. (2,0đ)	Vẽ trung tuyến CF của Tam giác ABC, Trên tia đối của tia FC lấy điểm N sao cho FN = FC.	0,25
	C/M được : $\triangle ANF = \triangle BCF$ (c-g- c) $\Rightarrow AN = BC$	0,25
	Xét $\triangle CAN$ có $AN + AC > NC$ (bất đẳng thức tam giác) $\Rightarrow AC + BC > NC$	0,25
	Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $CF = 3 GF \Rightarrow NC = 6 GF$ (1)	0,25
	Ta sẽ chứng minh: nếu $\angle AGB \leq 90^0$ thì $GF \geq \frac{AB}{2}$	
	Giả sử $GF < \frac{AB}{2}$ hay $GF < AF = BF$ thì $\angle FAG < \angle AGF$; $\angle FBG < \angle BGF$ (quan hệ góc và cạnh tương ứng trong tam giác) $\Rightarrow \angle ABG + \angle BAG < \angle FGB + \angle FGA = \angle AGB \leq 90^0$	0,25
	Xét tam giác AGB có $\angle ABG + \angle BAG + \angle AGB < 90^0 + 90^0 = 180^0$ vô lí. Vậy nếu $\angle AGB \leq 90^0$ thì $GF \geq \frac{AB}{2}$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow NC \geq 3AB$ suy ra $AC + BC > 3AB$ (đpcm)	0,25
5. (2,0đ)	Biến đổi $C = \frac{22-3x}{4-x} = \frac{3(4-x)+10}{4-x} = 3 + \frac{10}{4-x}$	0,5
	C có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{10}{4-x}$ có giá trị lớn nhất	0,25

	Có $x \in \mathbb{Z}$, ta xét các trường hợp sau Với $x > 4 \Rightarrow 4 - x < 0$ thì $\frac{10}{4-x} < 0$ (1)	0,25
	Với $x > 4 \Rightarrow 4 - x > 0$. Phân số $\frac{10}{4-x}$ có tử và mẫu đều dương, tử không đổi nên có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất Có $x \in \mathbb{Z}$ Suy ra $4 - x \in \mathbb{Z}$ Suy ra $4 - x$ là số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow 4 - x = 1 \Rightarrow x = 3$ khi đó $\frac{10}{4-x}$ có giá trị là 10 (2)	0,5
	Từ (1) và (2) , phân số $\frac{10}{4-x}$ lớn nhất bằng 10	0,25
	Vậy GTLN của C bằng 13 khi và chỉ khi $x = 3$	0,25