

(Đề gồm có 01 trang)

Câu 1: (5.0 điểm).

1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-9}{x-9} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = \sqrt{3} - \sqrt{3 - \sqrt{13 - \sqrt{48}}}$.

2. Cho x, y, z là ba số thực khác 0, thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

Chứng minh rằng: $\frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = 3$.

Câu 2: (5.0 điểm).

1. Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3} + 1 - x = 0$.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

3. Cho đường thẳng $(d): mx + (m-1)y - 2m + 1 = 0$ (với m là tham số). Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi giá trị của m .

Câu 3: (5.0 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung BC cố định ($BC < 2R$). Điểm A di động trên đường tròn $(O; R)$ sao cho tam giác ABC nhọn. Kẻ đường cao AD và trực tâm H của tam giác ABC .

a) Đường thẳng chứa phân giác ngoài của góc BHC cắt AB, AC lần lượt tại các điểm M, N . Chứng minh tam giác AMN cân.

b) Các điểm E, F lần lượt là hình chiếu của D trên các đường thẳng BH, CH . Các điểm P, Q lần lượt là hình chiếu của D trên các cạnh AB, AC . Chứng minh 4 điểm P, E, F, Q thẳng hàng và $OA \perp PQ$.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của góc BAC tại K . Chứng minh đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 4: (2.0 điểm). Cho tam giác ABC cân tại A , điểm O là trung điểm của BC . Đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F . Điểm H chạy trên cung nhỏ EF của (O) , tiếp tuyến của đường tròn (O) tại H cắt AB, AC lần lượt tại M, N . Xác định vị trí của điểm H để diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5: (3.0 điểm).

1. Cho a, b, c là ba số thực dương, thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{5}{9} + a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 \geq 2abc(a + b + c)$.

2. Giải phương trình sau với nghiệm nguyên: $x^2 + 2y^2 + 3xy + 3x + 5y - 3 = 0$.

..... **Hết**

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH

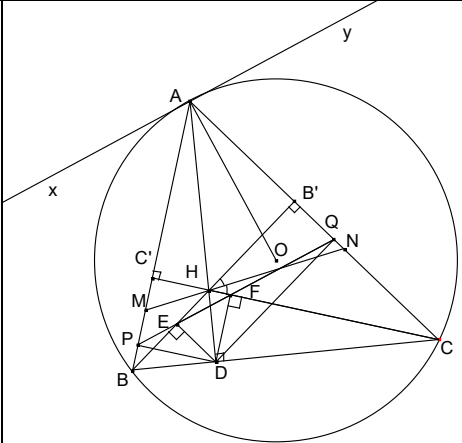
NĂM HỌC 2022 – 2023

Môn: Toán - Lớp 9

(Hướng dẫn và biểu điểm gồm 05 trang)

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1 (5.0đ)	1	Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-9}{x-9} \right)$	
	1.a	Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P .	
		P xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \\ x \neq 9 \end{cases}$	0.5
		$P = \left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} + \frac{x-9}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} \right)$	0.5
		$P = \left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$	0.5
		$= \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$	0.5
	1.b	Tính giá trị của biểu thức P khi $x = \sqrt{3} - \sqrt{3 - \sqrt{13 - \sqrt{48}}}$.	
		Ta có $x = \sqrt{3} - \sqrt{3 - \sqrt{13 - \sqrt{48}}} = \sqrt{3} - \sqrt{3 - (2\sqrt{3} - 1)} = \sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1) = 1$	0.75
		$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{1}+2}{\sqrt{1}} = 3$	0.25
	2	Cho x, y, z là ba số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Chứng minh rằng: $\frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = 3$	
		+ Chứng minh được bài toán: Nếu $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3=3abc$ + Vì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ và $x, y, z \neq 0$ nên suy ra được $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$	1.0
		Do đó $VT = \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = xyz \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) = xyz \cdot \frac{3}{xyz} = 3 = VP$ (đpcm)	1.0
2 (5.0đ)	1	Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3} + 1 - x = 0$	
		Điều kiện: $x \geq \frac{-1}{3}$	0.25
		Ta có: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3} + 1 - x = 0$ $\Leftrightarrow \frac{2x-2}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}} + 1 - x = 0 \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{2}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}} - 1 \right) = 0$	0.5
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (N)} \\ \sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3} = 2 \end{cases}$ Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3} = 2$	0.25

		$\Rightarrow 4x + 4 + 2\sqrt{(3x+1)(x+3)} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(3x+1)(x+3)} = -2x \text{ (Đk: } x \leq 0)$ $\Rightarrow x^2 - 10x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 2\sqrt{7} \text{ (L)} \\ x = 5 - 2\sqrt{7} \text{ (N)} \end{cases}$ Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x_1 = 1; x_2 = 5 - 2\sqrt{7}$.	0.75
			0.25
	2	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 & (1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y & (2) \end{cases}$	
		Điều kiện: $x + y > 0$. Biến đổi phương trình (1): $x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy + \frac{2xy}{x+y} - 1 = 0$ Đặt $x + y = S, xy = P$ (với $S^2 \geq 4P$), ta có phương trình: $S^2 + \frac{2P}{S} - 2P - 1 = 0 \Leftrightarrow S^3 + 2P - 2SP - S = 0$ $\Leftrightarrow S(S^2 - 1) - 2P(S - 1) = 0 \Leftrightarrow (S - 1)(S^2 + S - 2P) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ S^2 + S - 2P = 0 \end{cases}$ + Với $x + y = 1$ thay vào (2) ta được: $1 = (1 - y)^2 - y \Leftrightarrow y^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow (x; y) \in \{(1; 0); (-2; 3)\}$ + Với $S^2 + S - 2P = 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 + x + y - 2xy = 0$ $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x + y = 0$ (Loại, vì $x + y > 0$). Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(x; y)$ là $(1; 0); (-2; 3)$	0.25
			0.25
	3	Cho đường thẳng $(d): mx + (m - 1)y - 2m + 1 = 0$ (với m là tham số). Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi giá trị của m .	
		Gọi $A(x_A; y_A)$ là điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi giá trị của m , ta có phương trình: $mx_A + (m - 1)y_A - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (x_A + y_A - 2)m = y_A - 1 \text{ có nghiệm } \forall m$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + y_A - 2 = 0 \\ y_A - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 1 \\ y_A = 1 \end{cases}$ Vậy đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $A(1; 1)$ với mọi giá trị của m.	0.5
			0.25
			0.25
3 (5.0đ)		Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung BC cố định ($BC < 2R$). Điểm A di động trên đường tròn $(O; R)$ sao cho tam giác ABC nhọn. Kẻ đường cao AD và trục tâm H của tam giác ABC .	
	a	Đường thẳng chứa phân giác ngoài của góc BHC cắt AB, AC lần lượt tại các điểm M, N . Chứng minh tam giác AMN cân.	

		Gọi B' là hình chiếu của điểm B trên AC, C' là hình chiếu của điểm C trên AB. Ta có $\widehat{C'HM} = \widehat{B'HN} (= \widehat{NHC})$ $\Rightarrow \Delta C'HM \simeq \Delta B'HN (g.g)$ $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ANM} (t/c)$ $\Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A	0.5 0.25 0.25
b	Các điểm E, F lần lượt là hình chiếu của D trên các đường thẳng BH, CH. Các điểm P, Q lần lượt là hình chiếu của D trên các cạnh AB, AC. Chứng minh 4 điểm P, E, F, Q thẳng hàng và $OA \perp PQ$.	+ Ta có $\widehat{PEB} = \widehat{PDB}$ (vì cùng chắn cung PB của đường tròn (BPED)) $\widehat{PDB} = \widehat{HCD}$ (vì đồng vị $PD // CC'$) $\widehat{HCD} = \widehat{FDH}$ (vì cùng phụ $\widehat{FHD}$) $\widehat{FDH} = \widehat{FEH}$ (vì cùng chắn cung FH của đường tròn (DEHF)) $\Rightarrow \widehat{PEB} = \widehat{FEH}$ Mà 3 điểm B, E, H thẳng hàng nên 3 điểm P, E, F thẳng hàng. Tương tự chứng minh được 3 điểm E, F, Q thẳng hàng. Do đó 4 điểm P, E, F, Q thẳng hàng. + Kẻ xy là tiếp tuyến tại A của (O), Ta có $\widehat{xAB} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn cung AB của (O)) Mà $AP \cdot AB = AQ \cdot AC (= AD^2)$ $\Rightarrow$ tứ giác BPQC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{APQ} = \widehat{ACB}$ $\Rightarrow \widehat{xAB} = \widehat{APQ} \Rightarrow xy // PQ$ Mà $xy \perp AO$ (t/c tiếp tuyến) Do đó $OA \perp PQ$	0.5 0.25 0.25 0.25 0.25 0.5
c	Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của góc BAC tại K. Chứng minh đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.	Gọi U là giao điểm của BB' và KM, V là giao điểm của CC' và KN. + Ta có ΔAMN cân tại A nên đường phân giác AK của góc MAN cũng là đường trung trực của MN $\Rightarrow AK$ là đường kính của (AMN). $\Rightarrow \widehat{AMK} = 90^\circ \Rightarrow MK // CC'$ hay $UK // HV$ Tương tự $KV // UH$ nên tứ giác HVKU là hình bình hành	0.5
	hình		

	$\Rightarrow$ HK đi qua trung điểm của UV (1) + Ta có $MU \parallel CH \Rightarrow \frac{UB}{UH} = \frac{MB}{MC}$ (ta lét), tương tự $\frac{VC}{VH} = \frac{NC}{NB}$ Mà $\frac{MB}{MC} = \frac{HB}{HC}$ (t/c đường phân giác của góc $\widehat{BHC}$), tương tự $\frac{NC}{NB} = \frac{HC}{HB}$ Mà $\frac{HB}{HC} = \frac{HC}{HB}$ (vì $\triangle C'HB \simeq \triangle B'HC$) $\Rightarrow \frac{UB}{UH} = \frac{VC}{VH} \Rightarrow UV \parallel BC$ (Ta lét đảo) (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ HK đi qua trung điểm của BC Mà BC cố định nên HK luôn đi qua một điểm cố định.	0.5 0.25 0.25 0.25 0.25
4 (2.0đ)	Cho tam giác ABC cân tại A, điểm O là trung điểm của BC. Đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F. Điểm H chạy trên cung nhỏ EF của (O), tiếp tuyến của đường tròn (O) tại H cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Xác định vị trí của điểm H để diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất. + Ta có OM, ON lần lượt là phân giác $\widehat{EOM}, \widehat{FOH}$ (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau của (O)) $\Rightarrow \widehat{MON} = \frac{\widehat{EOF}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = \widehat{ABC}$ $\Rightarrow \triangle MBO \simeq \triangle MON$ (g.g) Cmtt $\triangle OCN \simeq \triangle MON$ $\Rightarrow \triangle MBO \simeq \triangle OCN \Rightarrow \frac{MB}{OC} = \frac{BO}{CN}$ $\Rightarrow BM \cdot CN = OB \cdot OC = \frac{BC^2}{4} = \text{const} \quad (1)$ + Lại có $S_{AMN} = S_{ABC} - S_{BMNC}$ S_{AMN} đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi S_{BMNC} đạt giá trị nhỏ nhất. Gọi R là bán kính của đường tròn (O), ta có: $S_{BMNC} = S_{BOM} + S_{MON} + S_{NOC} = \frac{1}{2} R (BM + MN + NC)$ $= \frac{1}{2} R (BM + NC + EM + FN) = \frac{1}{2} R (2BM + 2CN - 2BE)$ $= R (BM + CN - BE)$ (Vì $BE = CF, ME = MH, NF = NH; MH + NH = MN$) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, từ (1) và (2) suy ra: $S_{BMNC} \geq R \left(\sqrt{BM \cdot CN} - BE \right) = R \left(\frac{BC}{2} - BE \right) = \text{const}.$ (Vì $\triangle ABC$ cố định nên BC và BE không đổi)	0.5 0.5 0.5

		Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $BM = CN \Leftrightarrow MM // BC$ khi và chỉ khi H là giao điểm của đường trung trực của BC với đường tròn (O) . Vậy diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất khi H là giao của đường trung trực của BC với đường tròn (O) .	0.5
5 (3.0đ)	1	Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{5}{9} + a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 \geq 2abc(a + b + c)$.	
		+ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số thực dương ta có: $\begin{cases} a^4b^2 + \frac{1}{3}abc^2 + \frac{1}{9}ca \geq a^2bc \\ b^4c^2 + \frac{1}{3}a^2bc + \frac{1}{9}ab \geq b^2ca \\ c^4a^2 + \frac{1}{3}ab^2c + \frac{1}{9}bc \geq c^2ab \end{cases}$	0.5
		Cộng vế theo vế của các bất đẳng thức trên và kết hợp với giả thiết ta được: $a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + \frac{1}{9} \geq \frac{2}{3}abc(a + b + c)$ (1).	0.25
		+ Áp dụng đẳng thức phụ dạng: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Leftrightarrow xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}(x + y + z)^2$ ta được: $abc(a + b + c) = ab.ac + bc.ba + ca.cb \leq \frac{1}{3}(ab + bc + ca)^2 = \frac{1}{3}.$	0.25
		Hay $\frac{1}{3} \geq abc(a + b + c) \Leftrightarrow \frac{4}{9} \geq \frac{4}{3}abc(a + b + c)$ (2).	
		Cộng theo vế (1) và (2) ta có (đpcm).	0.25
	2	Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0.25
		Giải phương trình sau với nghiệm nguyên: $x^2 + 2y^2 + 3xy + 3x + 5y = 3$	
		+ Biến đổi đưa được về pt: $(x + y + 2)(x + 2y + 1) = 5$ + Tìm ra được các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình là: $(-6; 5), (0; -3), (6; -3), (-12; 5)$	1.0 0.5

Lưu ý: Học sinh có cách giải khác đúng giám khảo chấm thống nhất vẫn cho điểm theo thang điểm tối đa của câu đó.