

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} \right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của P tại $x = \sqrt[3]{4-2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{4+2\sqrt{6}}$ và $y = x^2 + 6$

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 + 3^y = 101$ (với x, y là số tự nhiên)

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 2x^2y + 2x = y^3 - 2xy^2 + 2y \\ \sqrt{x^3 - x^2} + \sqrt{x^2 - x} = y^2 \end{cases}$$

Câu 3. (1,5 điểm) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$8(x^4 + y^4) + \frac{1}{xy} \geq 5$$

Câu 4. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH ($AB < AC$ và $H \in BC$). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HA = HD$. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại E.

a) Chứng minh rằng $\triangle BEC$ và $\triangle ADC$ đồng dạng, từ đó suy ra số đo góc AEB.

b) Gọi M là trung điểm của BE. Tính số đo góc AHM.

c) Tia AM cắt BC tại G. Chứng minh $\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$

Câu 5. (1,5 điểm). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Tia AO cắt đường tròn (O) tại D.

a) Chứng minh các điểm B, C, E, F thuộc một đường tròn.

b) Gọi M là trung điểm của BC, tia AM cắt HO tại G. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC.

Câu 6. (1,0 điểm). Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu $2n + 1$ và $3n + 1$ là các số chính phương thì $5n + 3$ không phải là số nguyên tố.

-----HẾT-----