

Câu 1 (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = (\sqrt{x-4} + 1)\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}$ với $x \geq 5$.

b) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{3a+bc} + \sqrt{3b+ac} + \sqrt{3c+ab}.$$

Câu 2 (3,0 điểm)

1. Cho phương trình $\sqrt{3x^2 - 2x + m - 4} = \sqrt{6x}$ (1), với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = -7$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x(2y+1) - y \\ \sqrt{2x+y} = x+2y \end{cases}.$$

Câu 3 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Đường thẳng AO cắt BC tại E . Trên đoạn AO lấy điểm D sao cho $OD = OE$. Đường đi thẳng qua D , vuông góc với BC cắt BC, AC, AB lần lượt tại X, Y, Z . Đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ cắt lại (O) tại điểm $T \neq A$. Chứng minh rằng:

- Tam giác OXE là tam giác cân.
- Bốn điểm C, X, Y, T cùng thuộc một đường tròn.
- Hai đoạn thẳng BX và CE có độ dài bằng nhau.
- Đường thẳng AT song song với đường thẳng BC .

Câu 4 (1,0 điểm). Trong hình chữ nhật (H) kích thước $6 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$ cho 5 điểm phân biệt A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 . Chứng minh rằng:

- Trong 5 điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 luôn tồn tại 3 điểm cùng thuộc một hình tròn bán kính $2,5 \text{ cm}$.
- Tồn tại một hình tròn đường kính $0,99 \text{ cm}$ nằm trong (H) và không có điểm chung với bất kì hình tròn nào trong năm hình tròn tâm A_i đường kính 1 cm (với $i = 1, 2, 3, 4, 5$).

Câu 5 (1,0 điểm). Cho 10 số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ và p là một ước nguyên tố bất kì của $A = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 10a_{10}$. Chứng minh rằng:

- $B = 10^{p^2} - 10$ chia hết cho p .
- $C = a_1 \cdot 1^{p^{2024}} + a_2 \cdot 2^{p^{2024}} + a_3 \cdot 3^{p^{2024}} + \dots + a_{10} \cdot 10^{p^{2024}}$ là một hợp số.

—HẾT—

Ghi chú: Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....