

Bài 1. (4,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức $A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$.

2) Chứng minh $\left(\frac{a\sqrt{a}+1}{a-1} + 1 - \sqrt{a}\right) \cdot \sqrt{\frac{a-2\sqrt{a}+1}{a}} = 1$. với $a > 1$.

Bài 2. (5,0 điểm)

1) Giải phương trình: $2x^2 + 5x + 11 = (x+7)\sqrt{2x^2+1}$.

2) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2021}$. Chứng minh:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a-2021} + \sqrt{b-2021}.$$

Bài 3. (7,0 điểm)

Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Vẽ đường kính BC của đường tròn $(O; R)$, đường thẳng MC cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D . Gọi E là trung điểm của DC và H là trung điểm của AB .

1) Chứng minh: Ba điểm M, H, O thẳng hàng và bốn điểm O, E, A, B cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh: $\widehat{OMC} = \widehat{ODH}$.

3) Tiếp tuyến tại D của đường tròn $(O; R)$ cắt MO tại N . Gọi P là giao điểm của AB và OD . Chứng minh: $NP \perp OE$.

Bài 4. (3,0 điểm)

1) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình: $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$.

2) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $(x-y)\sqrt{xy} = x+y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x+y$.

Bài 5. (1,0 điểm)

Trên bảng viết các số 3, 4, 5. Mỗi lần cho phép thay hai số bất kì chẳng hạn a, b bởi hai số $\frac{3a+4b}{5}$ và $\frac{4a-3b}{5}$. Thực hiện liên tiếp các phép biến đổi trên, hỏi có khi nào trên bảng thu được các số 7; -1; 1 không? Vì sao?