LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 THÀNH PHỐ HÀ NỘI 2019

Võ Quốc Bá Cẩn

1. Đề thi

Bài 1 (5.0 *điểm*).

a) Giải phương trình:
$$\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}.$$

b) Cho $S = \left(1 - \frac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1 - \frac{2}{3\cdot 4}\right)\cdots\left(1 - \frac{2}{2020\cdot 2021}\right)$ là một tích của 2019 thừa số. Tính S (kết quả để dưới dạng phân số tối giản).

Bài 2 (5.0 *điểm*).

a) Biết a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 - ab + b^2$ chia hết cho 9, chứng minh rằng cả a và b đều chia hết cho 3.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $9^n + 11$ là tích của k ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$) số tự nhiên liên tiếp.

Bài 3 (3.0 *điểm*).

a) Cho x, y, z là các số thực dương nhỏ hơn 4. Chứng minh rằng trong các số $\frac{1}{x} + \frac{1}{4-y}$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{4-z}$, $\frac{1}{z} + \frac{1}{4-x}$ luôn tồn tại ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 1.

b) Với các số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + bc + ca - abc$.

Bài 4 (6.0 *điểm*). Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi S là giao điểm của AI và DE.

a) Chứng minh rằng tam giác IAB đồng dạng với tam giác EAS.

b) Gọi K là trung điểm của AB và O là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm K, O, S thẳng hàng.

c) Gọi M là giao điểm của KI và AC. Đường thẳng chứa đường cao AH của tam giác ABC cắt đường thẳng DE tại N. Chứng minh rằng $AM = AN$.

Bài 5 (1.0 *điểm*). Xét bảng ô vuông cỡ 10×10 gồm 100 hình vuông có cạnh 1 đơn vị. Người ta điền vào mỗi ô vuông của bảng một số nguyên tùy ý sao cho hiệu hai số được điền ở hai ô chung cạnh bất kỳ đều có giá trị tuyệt đối không vượt quá 1. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên xuất hiện trong bảng ít nhất 6 lần.

2. Lời giải và bình luận các bài toán

Bài 1 (5.0 *điểm*).

a) Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}.$$

b) Cho $S = \left(1 - \frac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1 - \frac{2}{3\cdot 4}\right)\cdots\left(1 - \frac{2}{2020\cdot 2021}\right)$ là một tích của 2019 thừa số. Tính S (kết quả để dưới dạng phân số tối giản).

Lời giải. **a)** Điều kiện: $x \geq 1$. Đặt $a = \sqrt{x-1}$, $b = \sqrt[3]{2-x}$ thì ta có $a \geq 0$, $b \leq 1$ và

$$a^2 + b^3 = 1. \tag{1}$$

Ngoài ra, từ giả thiết, ta cũng có $a + b = 1$. Thay $a = 1 - b$ vào (1), ta được

$$(1-b)^2 + b^3 = 1,$$

hay

$$b(b-1)(b+2) = 0.$$

Suy ra $b \in \{-2, 0, 1\}$, hay $x \in \{10, 2, 1\}$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn. Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{1, 2, 10\}$.

b) Để ý rằng với mọi n nguyên dương, ta có

$$1 - \frac{2}{n(n+1)} = \frac{n^2+n-2}{n(n+1)} = \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} S &= \frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\cdots\frac{2019\cdot 2022}{2020\cdot 2021} \\ &= \frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdots 2019)\cdot(4\cdot 5\cdot 6\cdots 2022)}{(2\cdot 3\cdot 4\cdots 2020)\cdot(3\cdot 4\cdot 5\cdots 2021)} \\ &= \frac{2022}{2020\cdot 3} \\ &= \frac{337}{1010}. \end{aligned}$$

Vậy $S = \frac{337}{1010}$. □

Bài 2 (5.0 *điểm*).

a) Biết a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 - ab + b^2$ chia hết cho 9, chứng minh rằng cả a và b đều chia hết cho 3.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $9^n + 11$ là tích của k $(k \in \mathbb{N},\ k \geq 2)$ số tự nhiên liên tiếp.

Lời giải. a) Từ giả thiết, ta suy ra $4(a^2 - ab + b^2) = (2a - b)^2 + 3b^2$ chia hết cho 9. Do $3b^2$ chia hết cho 3 nên $(2a - b)^2$ chia hết cho 3, suy ra $2a - b$ chia hết cho 3. Từ đó, ta có $(2a - b)^2$ chia hết hết cho 9. Suy ra $3b^2$ chia hết cho 9, do đó b^2 chia hết cho 3, tức b chia hết cho 3. Mà $2a - b$ chia hết cho 3 nên ta cũng có a chia hết cho 3. Vậy cả hai số a và b đều chia hết cho 3.

b) Để ý rằng trong ba số tự nhiên liên tiếp luôn có ít nhất một số chia hết cho 3, mà $9^n + 11$ không chia hết cho 3 nên $9^n + 11$ không thể là tích của $k \geq 3$ số tự nhiên liên tiếp. Từ đó, theo yêu cầu của đề bài, ta suy ra $9^n + 11$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

Đặt $9^n + 11 = a(a + 1)$ với $a \in \mathbb{N}^*$ thì ta có $a(a + 1) \geq 20$ (do $9^n \geq 9$), suy ra $a \geq 4$. Từ đây, ta có

$$a(a + 1) - 11 = (a - 2)^2 + 5(a - 3) > (a - 2)^2. \quad (1)$$

Mặt khác, ta cũng có

$$a(a + 1) - 11 < a(a + 1) < (a + 1)^2. \quad (2)$$

Do $a(a + 1) - 11 = 9^n = (3^n)^2$ là số chính phương nên kết hợp với các đánh giá (1) và (2), ta suy ra $a(a + 1) - 11 \in \left\{(a - 1)^2,\ a^2\right\}$. Bằng cách xét các trường hợp cụ thể, ta tìm được $a \in \{4,\ 11\}$. Thử lại, ta thấy chỉ có $a = 4$ (tương ứng, $n = 1$) thỏa mãn yêu cầu. Vậy có duy nhất một giá trị n thỏa mãn yêu cầu đề bài là $n = 1$. □

Bình luận. Ở câu **b)**, sau khi nhận xét được $9^n + 11$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp, ta cũng có thể nhân 4 hai vế để tách bình phương và viết thành tích thừa số để hoàn tất lời giải.

Bài 3 (3.0 *điểm*).

a) Cho x, y, z là các số thực dương nhỏ hơn 4. Chứng minh rằng trong các số $\frac{1}{x} + \frac{1}{4-y}$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{4-z}$, $\frac{1}{z} + \frac{1}{4-x}$ luôn tồn tại ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 1.

b) Với các số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + bc + ca - abc$.

Lời giải. a) Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x = \min\{x,\ y,\ z\}$. Khi đó, ta có

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4 - y} \geq \frac{1}{y} + \frac{1}{4 - y} = \frac{(y - 2)^2}{y(4 - y)} + 1 \geq 1.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) Trong ba số a, b, c, tồn tại hai số cùng $\geq \frac{1}{2}$ hoặc cùng $\leq \frac{1}{2}$. Không mất tính tổng quát, giả sử hai số đó là a và b. Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Từ đó suy ra $1 - c^2 = a^2 + b^2 + 2abc \geq 2ab + 2abc = 2ab(1 + c)$, hay

$$1 - c \geq 2ab. \quad (1)$$

Từ đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $1 \geq c + 2ab \geq 2\sqrt{2abc}$, suy ra

$$abc \leq \frac{1}{8}. \quad (2)$$

Ta cũng có $c(2a-1)(2b-1) \geq 0$ nên
$$4abc + c \geq 2ac + 2bc. \tag{3}$$
Từ các bất đẳng thức (3), (1) và (2), ta có
$$2P = 2ab + 2ac + 2bc - 2abc \leq 2ab + c + 2abc \leq 1 + 2abc \leq 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$
hay
$$P \leq \frac{5}{8}.$$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$. Vậy $\max P = \frac{5}{8}$. □

Bình luận. Có thể chứng minh câu **a)** bằng cách cộng ba số lại và sử dụng bất đẳng thức phụ
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}, \quad \forall x, y > 0.$$
Câu **b)** cũng có thể được giải bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng cộng mẫu. Cụ thể, ta có thể viết lại giả thiết bài toán dưới dạng
$$\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab} = 2.$$
Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng cộng mẫu, ta có
$$\begin{aligned}\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab} &= \frac{a^2}{a^2+abc} + \frac{b^2}{b^2+abc} + \frac{c^2}{c^2+abc} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3abc}.\end{aligned}$$
Từ đó suy ra
$$2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3abc},$$
hay
$$a^2 + b^2 + c^2 + 6abc \geq 2(ab+bc+ca).$$
Mà $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$ nên $1 + 4abc \geq 2(ab+bc+ca)$, hay
$$2P \leq 2abc + 1.$$
Mặt khác, dễ chứng minh được $abc \leq \frac{1}{8}$ (theo cách như (2) hoặc sử dụng trực tiếp bất đẳng thức AM-GM cho bốn số dương $1 = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc \geq 4\sqrt[4]{2a^3b^3c^3}$) nên $2P \leq \frac{5}{4}$, hay $P \leq \frac{5}{8}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Một cách khác cho câu **b)** nữa là sử dụng biến đổi
$$2P = 2(ab+bc+ca) - 2abc = 2(ab+bc+ca) + a^2 + b^2 + c^2 - 1 = (a+b+c)^2 - 1.$$
Từ giả thiết, ta có $(c+ab)^2 = (1-a^2)(1-b^2)$. Suy ra
$$c = -ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leq -ab + \frac{(1-a^2)+(1-b^2)}{2} = \frac{2-(a+b)^2}{2}.$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta cũng có

$$a + b \leq \frac{(a+b)^2 + 1}{2}.$$

Do đó

$$a + b + c \leq \frac{(a+b)^2 + 1}{2} + \frac{2 - (a+b)^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Từ đây, ta có $2P \leq \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$, hay $P \leq \frac{5}{8}$. Việc còn lại chỉ là xét điều kiện để dấu đẳng thức xảy ra.

Bài 4 (6.0 *điểm*). Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi S là giao điểm của AI và DE.

a) Chứng minh rằng tam giác IAB đồng dạng với tam giác EAS.

b) Gọi K là trung điểm của AB và O là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm K, O, S thẳng hàng.

c) Gọi M là giao điểm của KI và AC. Đường thẳng chứa đường cao AH của tam giác ABC cắt đường thẳng DE tại N. Chứng minh rằng $AM = AN$.

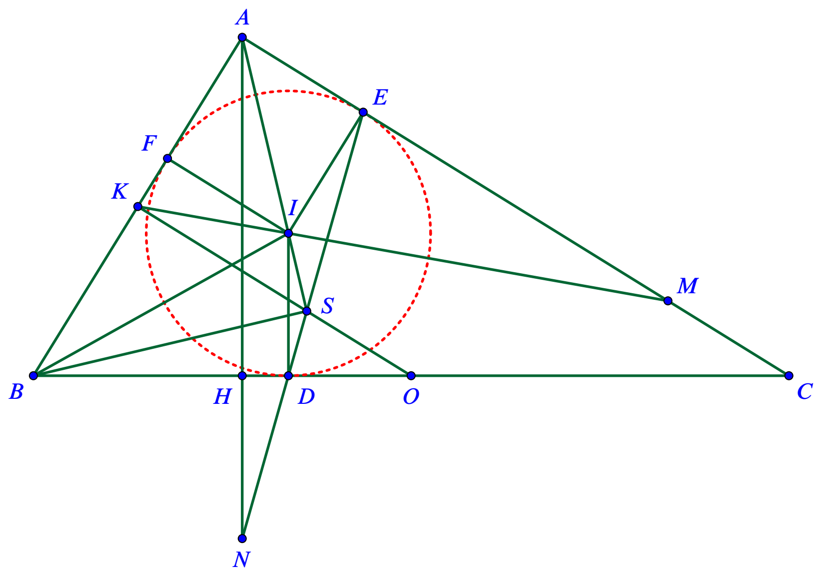
Lời giải. **a)** Ta có $CD = CE$ nên tam giác CED cân tại C, suy ra

$$\angle AES = 180^\circ - \angle CED = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle C}{2} = \frac{180^\circ + \angle C}{2}. \quad (1)$$

Mặt khác, ta cũng có

$$\angle AIB = 180^\circ - \angle IAB - \angle IBA = 180^\circ - \frac{\angle BAC + \angle ABC}{2}$$
$$= 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle C}{2} = \frac{180^\circ + \angle C}{2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra $\angle AES = \angle AIB$. Lại có $\angle EAS = \angle IAB = 45^\circ$ nên các tam giác EAS và IAB đồng dạng (g-g).



b) Do $\triangle EAS \sim \triangle IAB$ nên $\angle ESA = \angle IBA = \angle IBD$, từ đó suy ra

$$\angle IBD + \angle ISD = \angle ISE + \angle ISD = 180^\circ.$$

Do đó, tứ giác $ISDB$ nội tiếp. Suy ra $\angle ISB = \angle IDB = 90^\circ$. Mà $\angle SAB = 45^\circ$ nên tam giác SAB vuông cân tại S, suy ra SK vuông góc với AB. (3)

Mặt khác, ta lại có OK là đường trung bình ứng với cạnh AC của tam giác ABC nên OK vuông góc với AB. (4)

Từ (3) và (4), ta suy ra ba điểm $K,\ O,\ S$ thẳng hàng.

c) Xét tam giác AKM có AI là đường phân giác kẻ từ A, ta có

$$\frac{AM}{AK} = \frac{IM}{IK}.$$

Mặt khác, áp dụng định lý Thales trong tam giác AKM có $IF \parallel AM$, ta cũng có

$$\frac{IM}{IK} = \frac{FA}{FK}.$$

Do đó $\frac{AM}{AK} = \frac{AF}{KF}$, hay

$$\frac{AM}{AF} = \frac{AK}{KF}. \tag{5}$$

Bây giờ, sử dụng định lý Thales trong tam giác ANS có $ID \parallel AN$, ta có

$$\frac{AN}{ID} = \frac{AS}{IS}.$$

Sử dụng định lý Thalese trong tam giác AKS có $IF \parallel KS$, ta cũng có

$$\frac{AS}{IS} = \frac{AK}{FK}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{AN}{ID} = \frac{AF}{KF}. \tag{6}$$

Từ (5) và (6) với chú ý $ID = AF$ (chỉ cần để ý tứ giác $AFIE$ là hình vuông), ta suy ra $AM = AN$. Đây chính là kết quả cần chứng minh. □

Bài 5 (1.0 *điểm*). Xét bảng ô vuông cỡ 10×10 gồm 100 hình vuông có cạnh 1 đơn vị. Người ta điền vào mỗi ô vuông của bảng một số nguyên tùy ý sao cho hiệu hai số được điền ở hai ô chung cạnh bất kỳ đều có giá trị tuyệt đối không vượt quá 1. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên xuất hiện trong bảng ít nhất 6 lần.

Lời giải. Gọi số nhỏ nhất được điền vào bảng là x. Khi đó với một số nguyên y được điền vào bảng, ta xét bảng ô vuông con $n \times m$ (n dòng, m cột, $0 \le n \le 10$, $0 \le m \le 10$) nối ô vuông điền x và ô vuông điền y như hình vẽ bên dưới, trong đó $a_{11} = x$, $a_{nm} = y$ (các trường hợp a_{11} ở các góc khác được xét tương tự).

a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1m}
			a_{2m}
			$\vdots$
			a_{nm}

Ta có
$$a_{12} \le a_{11} + 1, \quad a_{13} \le a_{12} + 1 \le a_{11} + 2, \quad \ldots, \quad a_{1m} \le a_1 + m - 1$$
và
$$a_{2m} \le a_{1m} + 1 \le a_1 + m, \quad a_{3m} \le a_{2m} + 1 \le a_1 + m + 1, \quad \ldots, \quad a_{nm} \le a_1 + n + m - 2.$$
Như vậy, ta có
$$x \le y \le x + n + m - 2 \le x + 18.$$
Kết quả trên chứng tỏ $y \in \{x,\ x+1,\ \ldots,\ x+18\}$. Suy ra có không quá 19 số khác nhau được điền vào bảng ô vuông đã cho. Do bảng đã cho có 100 ô vuông nên theo nguyên lý Dirichlet, có một số xuất hiện không ít hơn $\left\lfloor \frac{100}{19} \right\rfloor + 1 = 6$ lần. Ta có điều phải chứng minh. □