

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Cho biểu thức $P = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4$.

Rút gọn P rồi tìm x để P là một số tự nhiên.

b) Có 20 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Chọn ngẫu nhiên ra 8 tấm thẻ.

b1) Tính xác suất để có 8 thẻ là đều số nguyên tố.

b2) Tính xác suất để có 3 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

Câu 2: (5,0 điểm)

a) Giải phương trình $\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{48}$.

b) Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 4y + 1 = 0 \\ (x^2 + 1)(x + y - 2) = y \end{cases}$$

Câu 3. (3,0 điểm)

a) Cho a, b là các số nguyên dương phân biệt thỏa mãn $2009a^{2025} + 2025b^{2025}$ chia hết cho $a + b$. Chứng minh $a + b$ là hợp số.

b) Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn $a^2 + a - 109 = 25^b$.

c) Tìm các số nguyên dương n để $n+1$ và $n^3 + n^2 - 2n + 6$ đều là các số chính phương.

Câu 4. (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), I là giao điểm của các đường phân giác trong tam giác ABC , Tia AI, BI, CI cắt các cạnh BC, AC, AB lần lượt tại D, E, F .

Trên tia đối của tia DA lấy điểm S sao cho $\widehat{CBS} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Đường thẳng qua B vuông góc với SB cắt đường thẳng qua C vuông góc SC tại T . M là giao điểm của đường thẳng ST và BC .

a) Chứng minh $SI^2 = SB \cdot SC$ và SA vuông góc AT .

b) Gọi O là trung điểm của ST, lấy K là điểm đối xứng với S qua BC. Chứng minh góc MIO = góc TIK.

c). Chứng minh $\frac{1}{AD \cdot BC} + \frac{1}{BE \cdot AC} + \frac{1}{CF \cdot AB} \leq \frac{6 \cdot OB}{AB \cdot BC \cdot CA}$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z là thỏa mãn $xy + yz + zx = 12xyz$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{12x+1} + \sqrt{12y+1} + \sqrt{12z+1} \leq 4\sqrt{3(x+y+z)}$

....Hết...

Họ tên thí sinh:.....Số báo danh.....