| | |
|---|---|
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO** | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH** |
| **THANH HÓA** | **NĂM HỌC 2022 - 2023** |
| | **MÔN THI: TOÁN - THCS** |
| **ĐỀ CHÍNH THỨC** | *Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề* |
| | *(Đề thi có 01 trang)* |

**Câu I** $(4,0$ điểm).

**1** Cho biểu thức $P=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}\cdot\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right)+\dfrac{9\sqrt{x}+14}{x+3\sqrt{x}+2}$ với $x\ge 0$.

Rút gọn biểu thức $P$ và tìm các giá trị của $x$ để biểu thức $P$ có giá trị là số tự nhiên.

**2** Cho các số thực $a,b,c$ thỏa mãn đồng thời $a^2+2=b^4;b^2+2=c^4;c^2+2=a^4$.

Tính giá trị biểu thức $B=a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2-\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+2022$.

**Câu II** (4,0 điểm).

**2.** Giải phương trình $4x^3+13x^2-14x=3-\sqrt{15x+9}$.

**3.** Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+3xy^2+49=0\\ x^2-8xy+y^2=8y-17x\end{cases}$.

**Câu III** $(4,0$ điểm).

**1.** Tìm tất cả các bộ số nguyên $(m,p,q)$ thỏa mãn: $2^m\cdot p^2+1=q^5$ trong đó $m>0;p,q$ là hai số nguyên tố.

**2.** Cho $a,b$ là hai số nguyên thỏa mãn $a$ khác $b$ và $ab(a+b)$ chia hết cho $a^2+ab+b^2$. Chứng minh rằng $|a-b|>\sqrt[3]{ab}$.

**Câu IV** (6,0 điểm).

Cho tam giác $ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn tâm $O$ bán kính $R$. Đường tròn tâm $I$ đường kính $BC$ cắt các cạnh $AB$ và $AC$ lần lượt ở $M$ và $N$. Các tia $BN$ và $CM$ cắt nhau tại $H$. Gọi $K$ là giao điểm của $IH$ với $MN$. Qua $I$ kẻ đường thẳng song song với $MN$ cắt các đường thẳng $CM$ và $BN$ lần lượt ở $E$ và $Q$.

**1** Chứng minh $\Delta ANM$ đồng dạng với $\Delta ABC$ và $\widehat{BQI}=\widehat{ECI}$.

**2** Chứng minh $IQIE=IC^2$ và $\dfrac{KN}{KM}=\left(\dfrac{HN}{HM}\right)^2$.

**3** Gọi $D$ la giao điểm của $AH$ với $BC$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{AD\cdot BN}+\frac{1}{BN\cdot CM}+\frac{1}{CM\cdot AD}\le\frac{4}{3(R-OH)^2}.$$

**Câu V (2,0 điểm)** Cho ba số $a,b,c\ge 1$ thỏa mãn $16abc+4(ab+bc+ca)=81+24(a+b+c)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\dfrac{1}{a\left(\sqrt{a^2-1}+a\right)}+\dfrac{1}{b\left(\sqrt{b^2-1}+b\right)}+\dfrac{1}{c\left(\sqrt{c^2-1}+c\right)}$

------------- **HẾT** --------------

*Họ và tên thí sinh:……………………………………………SBD.…………..*

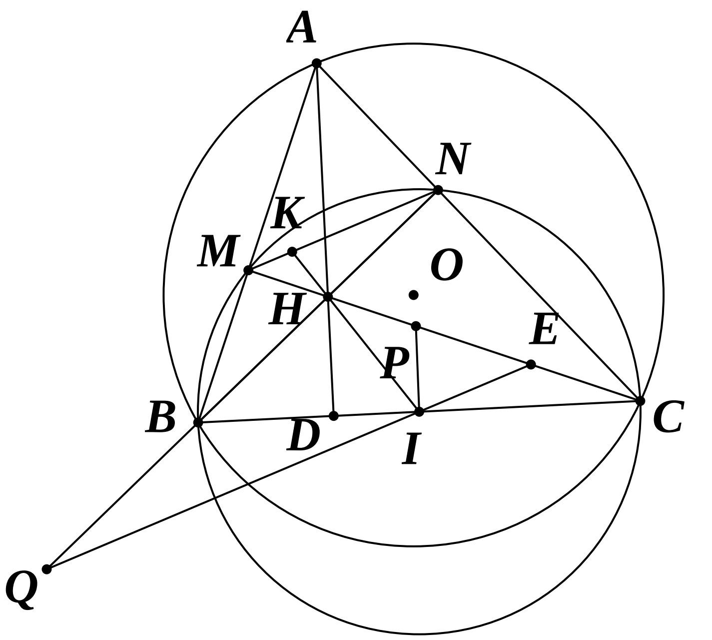
| | |
|---|---|
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**<br>**THANH HÓA** | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH**<br>**NĂM HỌC: 2022-2023** |

**HƯỚNG DẪN CHẤM**
**Môn thi: TOÁN – THCS**
*(Hướng dẫn chấm có 06 trang)*

| Câu | NỘI DUNG | Điểm |
|---|---|---|
| **I**<br>**4,0 điểm** | **1. Cho biểu thức** $P=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right)+\frac{9\sqrt{x}+14}{x+3\sqrt{x}+2}$ **với** $x\ge 0$**.**<br>**Rút gọn biều thức** $P$ **và tìm các giá trị của** $x$ **để biểu thức** $P$ **có giá trị là số tự nhiên.** | **2,0** |
| | Điều kiện $x\ge 0$. Ta có:<br>$P=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right)+\frac{9\sqrt{x}+14}{x+3\sqrt{x}+2}=\frac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}+\frac{9\sqrt{x}+14}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$ | 0,5 |
| | $=\frac{2x+11\sqrt{x}+14}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(2\sqrt{x}+7\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{2\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}+1}$<br>Vậy $P=\frac{2\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0$ | 0,5 |
| | Ta có $P=\frac{2\left(\sqrt{x}+1\right)+5}{\sqrt{x}+1}=2+\frac{5}{\sqrt{x}+1}$, vì $x\ge 0$ nên $0<\frac{5}{\sqrt{x}+1}\le 5$ suy ra $2<P\le 7$ | 0,25 |
| | Do $P\in\mathbb{N}$ nên $P\in\left\{3;4;5;6;7\right\}\Leftrightarrow\frac{5}{\sqrt{x}+1}\in\left\{1;2;3;4;5\right\}\Leftrightarrow\sqrt{x}+1\in\left\{5;\frac{5}{2};\frac{5}{3};\frac{5}{4};1\right\}$. | 0,25 |
| | $\Leftrightarrow\sqrt{x}\in\left\{4;\frac{3}{2};\frac{2}{3};\frac{1}{4};0\right\}\Leftrightarrow x\in\left\{16;\frac{9}{4};\frac{4}{9};\frac{1}{16};0\right\}$.<br>Kết hợp với điều kiện ta thấy $x\in\left\{16;\frac{9}{4};\frac{4}{9};\frac{1}{16};0\right\}$ là giá trị cần tìm. | 0,25 |
| | Vậy để P có giá trị là số tự nhiên thì $x\in\left\{16;\frac{9}{4};\frac{4}{9};\frac{1}{16};0\right\}$ | 0,25 |
| | **2. Cho các số thực** $a,b,c$ **thỏa mãn đồng thời:** $a^2+2=b^4,b^2+2=c^4,c^2+2=a^4$**.**<br>**Tính giá trị biểu thức** $B=a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2-\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+2022$**.** | **2,0** |
| | Từ giả thiết ta suy ra: $\begin{cases}a^2+1=b^4-1=\left(b^2-1\right)\left(b^2+1\right)\\ b^2+1=c^4-1=\left(c^2-1\right)\left(c^2+1\right)\\ c^2+1=a^4-1=\left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right)\end{cases}$ | 0,5 |
| | Nhân vế với vế 3 đẳng thức trên với nhau ta được:<br>$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)=\left(b^2-1\right)\left(c^2-1\right)\left(a^2-1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\left(a^2+1\right)$ | 0,5 |
| | Do $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)>0$ nên $\left(b^2-1\right)\left(c^2-1\right)\left(a^2-1\right)=1$.<br>Khai triền ta được $b^2c^2a^2-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2+a^2+b^2+c^2-1=1$ | 0,5 |

| | | |
|---|---|---|
| | $\Leftrightarrow a^2b^2c^2+a^2+b^2+c^2-\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)=2.$<br>Vậy $B=2+2022=2024$. | 0,5 |
| **II**<br>**4,0**<br>**điểm** | **1.Giải phương trình:** $4x^3+13x^2-14x=3-\sqrt{15x+9}$. | **2,0** |
| | ĐKXĐ: $x\ge -\frac{3}{5}$. | 0,25 |
| | Pt đã cho $4x^3+13x^2-14x-3+\sqrt{15x+9}=0$<br>$\Leftrightarrow 4x^3+13x^2-12x-(2x+3)+\sqrt{15x+9}=0 \Leftrightarrow \left(4x^2-3x\right)(x+4)-\left[(2x+3)-\sqrt{15x}\right.$<br>$\Leftrightarrow \left(4x^2-3x\right)(x+4)-\frac{(2x+3)^2-(15x+9)}{(2x+3)+\sqrt{15x+9}}=0$ | 0,5 |
| | $\Leftrightarrow \left(4x^2-3x\right)(x+4)-\frac{4x^2+12x+9-15x-9}{(2x+3)+\sqrt{15x+9}}=0$<br>$\Leftrightarrow \left(4x^2-3x\right)\left(x+4-\frac{1}{2x+3+\sqrt{15x+9}}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x^2-3x=0\ (1)\\ x+4-\frac{1}{2x+3+\sqrt{15x+9}}=0\quad (2)\end{array}\right.$ | 0,25 |
| | $-\text{Pt}(1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\frac{3}{4}\end{array}\right.$ (đều thoả mãn ĐKXĐ) | 0,25 |
| | Xét Pt (2): $x+4-\frac{1}{2x+3+\sqrt{15x+9}}=0$<br>Vì $x\ge -\frac{3}{5}\Rightarrow x+4\ge \frac{17}{5}$ và $2x+3+\sqrt{15x+9}\ge \frac{9}{5}\Rightarrow \frac{1}{2x+3+\sqrt{15x+9}}\le \frac{5}{9}$<br>Suy ra $x+4-\frac{1}{2x+3+\sqrt{15x+9}}\ge \frac{128}{45}>0$ nên pt (2) vô nghiệm. | 0,5 |
| | Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{0;\frac{3}{4}\right\}$. | 0,25 |
| | **2. Giải hệ phương trình** $\begin{cases}x^3+3xy^2+49=0\\ x^2-8xy+y^2=8y-17x\end{cases}$. | **2,0** |
| | Nhân hai vế của phương trình (2) với 3, rồi cộng với phương trình (1) vế theo vế ta được pt: $x^3+3x^2+3xy^2-24xy+3y^2+49=24y-51x$ | 0,5 |
| | $\Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1+3y^2(x+1)-24y(x+1)+48(x+1)=0$<br>$\Leftrightarrow (x+1)\left[(x+1)^2+3y^2-24y+48\right]=0 \Leftrightarrow (x+1)\left[(x+1)^2+3(y-4)^2\right]=0$<br>$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+1=0\\ (x+1)^2+3(y-4)^2=0\end{array}\right.$ | 0,75 |
| | TH1: $\begin{cases}x=-1\\ x^3+3xy^2=-49\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=4;y=-4\end{cases}$ | 0,25 |
| | TH2: $\begin{cases}(x+1)^2+3(y-4)^2=0\\ x^3+3xy^2=-49\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=4\end{cases}$ | 0,25 |
| | Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(x,y)\in\left\{(-1;4),(-1;-4)\right\}$ | 0,25 |

| | | |
|---|---|---|
| **III 4,0 điểm** | **1. Tìm tất cả các bộ số nguyên $(m, p, q)$ thỏa mãn $2^m p^2 + 1 = q^5$ trong đó $m > 0; p, q$ là hai số nguyên tố.** | **2,0** |
| | Vì $m > 0$ và $p$ nguyên tố nên $2^m p^2 + 1$ lẻ $\Rightarrow q$ lẻ<br>Nếu $p = 2$ thì $2^{m+2} + 1 = q^5 \Leftrightarrow (q-1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) = 2^{m+2}$<br>Vì $q$ lẻ $\Rightarrow q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ lẻ lớn hơn $1 \Rightarrow 2^{m+2}$ có ước lẻ lớn hơn 1 , vô lý.<br>Do đó $p$ lẻ. | 0,5 |
| | Ta viết phương trình đã cho dưới dạng $(q-1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) = 2^m p^2$<br>Do $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ lẻ và lớn hơn 1 nên $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = p$<br>hoặc $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = p^2$ | 0,5 |
| | + Xét trường hợp $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = p \Rightarrow q - 1 = 2^m p$. Do $2^m p > p$ nên $q - 1 > q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ (vô lý) | 0,25 |
| | + Xét trường hợp<br>$q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = p^2 \Rightarrow 4q^4 + 4q^3 + q^2 < 4p^2 = 4q^4 + 4q^3 + 4q^2 + 4q + 4$<br>$< 4q^4 + 4q^3 + 9q^2 + 4q + 4 \Rightarrow (2q^2 + q)^2 < 4p^2 < (2q^2 + q + 2)^2$. Từ đó suy ra<br>$4p^2 = (2q^2 + q + 1)^2$. Ta được phương trình $4(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) = (2q^2 + q + 1)^2$<br>$\Leftrightarrow q^2 - 2q - 3 = 0$, mà q nguyên tố, suy ra $q = 3$, từ đó tìm được $p = 11; m = 1$ | 0,5 |
| | Vậy ta có bộ ba số nguyên thoả mãn yêu cầu bài toán là: $(m, p, q) = (1; 11; 3)$ | 0,25 |
| | **2.Cho $a, b$ là hai số nguyên thỏa mãn $a$ khác $b$ và $ab(a+b)$ chia hết cho $a^2 + ab + b^2$. Chứng minh rằng $\lvert a - b \rvert > \sqrt[3]{ab}$** | **2,0** |
| | Đặt $d =$ ƯCLN(a, b) Suy ra $a = xd, b = yd$ với ƯCLN$(x, y) = 1$ Khi đó:<br>$\dfrac{ab(a+b)}{a^2 + ab + b^2} = \dfrac{dxy(x+y)}{x^2 + xy + y^2} \in \mathbb{Z}$ | 0,5 |
| | Ta có $UCLN(x^2 + xy + y^2; x) =$ UCLN$(y^2; x) = 1$.<br>Tương tự UCLN$(x^2 + xy + y^2; y) = 1$ | 0,5 |
| | Đặt $d =$ UCCLN $(x + y, x^2 + xy + y^2)$<br>$\Rightarrow \begin{cases} x + y \vdots d \\ x^2 + xy + y^2 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2 + xy + y^2) - x(x+y) \vdots d \\ (x^2 + xy + y^2) - y(x+y) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \vdots d \\ y^2 \vdots d \end{cases} \Rightarrow d = 1$ (Vì ƯCLN $(x, y) = 1)$ | 0,25 |
| | Do đó $d : x^2 + xy + y^2 \Rightarrow d \geq x^2 + xy + y^2$<br>Mặt khác $\lvert a - b \rvert^3 = d^3 \lvert x - y \rvert^3 = d^2 \lvert x - y \rvert^3 \cdot d \geq d^2 \cdot 1 \cdot (x^2 + xy + y^2) \rangle d^2 xy = ab$. | 0,5 |
| | Vậy $\lvert a - b \rvert > \sqrt[3]{ab}$. | 0,25 |
| **IV 6,0 điểm** | **Cho tam giác $ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn tâm $O$ bán kính $R$. Đường tròn tâm $I$ đường kính $BC$ cắt các cạnh $AB$ và $AC$ lần lượt ở $M$ và $N$. Các tia $BN$ và $CM$ cắt nhau tại $H$. Gọi $K$ là giao điểm của $IH$ với $MN$. Qua $I$ kẻ đường thẳng song song với $MN$ cắt các đường thẳng $CM$ và $BN$ lần lượt ở $E$ và $Q$.** | **6,0** |

| | | |
|---|---|---|
| |  | |
| | **1.Chứng minh $\Delta ANM$ đồng dạng với $\Delta ABC$ và $\widehat{BQI}=\widehat{ECI}$ .** | **2,0** |
| | Ta có: $\Delta ANB \sim \Delta AMC\left(g\cdot g\right) \Rightarrow \dfrac{AN}{AM}=\dfrac{AB}{AC}$ | 0,5 |
| | Xét $\Delta ANM$ và $\Delta ABC$ có:<br>$\dfrac{AN}{AM}=\dfrac{AB}{AC};\widehat{A}$ là góc chung<br>$\Rightarrow \Delta ANM \sim \Delta ABC($ c.g.c $)$ (Đpcm) | 0,5 |
| | Vì $\Delta ANM \sim \Delta ABC \Rightarrow \widehat{ANM}=\widehat{ABC}$<br>Mà $\widehat{ANM}+\widehat{MNB}=\widehat{ABC}+\widehat{MCB}=90^\circ$ (Do $BN\perp AC;CM\perp AB\big) \Rightarrow \widehat{MNB}=\widehat{MCB}$ | 0,5 |
| | mà $\widehat{MNB}=\widehat{BQI}$ (2 góc so le trong)<br>$\Rightarrow \widehat{BQI}=\widehat{MCB}$ hay $\widehat{BQI}=\widehat{ECI}($ đpcm $)$ | 0,5 |
| | **2. Chứng minh $IQIE=IC^2$ và $\dfrac{KN}{KM}=\left(\dfrac{HN}{HM}\right)^2$ .** | **2,0** |
| | Theo câu a, $\widehat{BQI}=\widehat{ECI}$ lại có $\widehat{BIQ}=\widehat{EIC}$ (2 góc đối đỉnh) $\Rightarrow \Delta BIQ \sim \Delta EIC\left(g.g\right)$<br>$\Rightarrow \dfrac{IQ}{IC}=\dfrac{IB}{IE} \Rightarrow IQ\cdot IE=IC.IB$ mà $IB=IC\left(gt\right) \Rightarrow IQ.IE=IC^2$ | 0,5 |
| | $\Rightarrow \dfrac{IQ}{IE}=\left(\dfrac{IC}{IE}\right)^2$ (1)<br>Áp dụng hệ quả Ta - Lét ta có: $\dfrac{KN}{IQ}=\dfrac{HK}{HI}=\dfrac{KM}{IE} \Rightarrow \dfrac{KN}{KM}=\dfrac{IQ}{IE}$ (2) | 0,25 |
| | Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{KN}{KM}=\left(\dfrac{IC}{IE}\right)^2$ | 0,25 |
| | Trên cạnh $EM$ lấy $P$ sao cho $IP=IE\left(P\neq E\right) \Rightarrow \Delta IPE$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IPC}=\widehat{IEP}$<br>Mà $\widehat{IEP}=\widehat{HMN}$(2 góc so le trong, $MN \parallel EQ$ ) $\Rightarrow \widehat{HMN}=\widehat{IPE}$ hay $\widehat{HMN}=\widehat{IPC}$<br>Lại có: $\widehat{ICP}=\widehat{HNM} \Rightarrow \Delta HMN \sim \Delta IPC\left(g.g\right)$ | 0,5 |

| | | |
|---|---|---|
| | $\Rightarrow \dfrac{IC}{IP}=\dfrac{HN}{HM}$ mà $IP=IE$ (cách lấy điểm P ) $\Rightarrow \dfrac{IC}{IE}=\dfrac{HN}{HM}$ (4)<br>Từ (3) và (4) $\Rightarrow \dfrac{KN}{KM}=\left(\dfrac{HN}{HM}\right)^2$ $(đpcm)$ | 0,5 |
| | **3. Gọi $D$ la giao điểm của $AH$ với $BC$. Chứng minh rằng**<br>$\dfrac{1}{AD\cdot BN}+\dfrac{1}{BN\cdot CM}+\dfrac{1}{CM\cdot AD}\le \dfrac{4}{3(R-OH)^2}.$ | **2,0** |
| | Vì $BN\perp AC; CM\perp AB; \{H\}=BN\cap CM \Rightarrow H$ là trực tâm $\Delta ABC$<br>$\Rightarrow AH\perp BC$ hay $AD\perp BC$<br>Do đó ta có: $\dfrac{HD}{AD}+\dfrac{HN}{BN}+\dfrac{HM}{CM}=\dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}}+\dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}}+\dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}}=1$<br>$\Rightarrow \dfrac{AD-AH}{AD}+\dfrac{BN-BH}{BN}+\dfrac{CM-CH}{CM}=1 \Leftrightarrow \dfrac{AH}{AD}+\dfrac{BH}{BN}+\dfrac{CH}{CM}=2$ | 0,5 |
| | Do $H$ là trực tâm $\Delta ABC$ nhọn nên $H$ nằm trong $\Delta ABC$<br>$\Rightarrow \begin{cases} AH\ge AO-OH=R-OH>0 \\ BH\ge BO-OH=R-OH>0 \\ CH\ge CO-OH=R-OH>0 \end{cases}$ (BĐT ba điểm)<br>$\Rightarrow 2=\dfrac{AH}{AD}+\dfrac{BH}{BN}+\dfrac{CH}{CM}\ge (R-OH)\left(\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{BN}+\dfrac{1}{CM}\right)\Rightarrow \dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{BN}+\dfrac{1}{CM}\le \dfrac{2}{R-OH}(5)$ | 0,5 |
| | Với mọi $x,y$ ta có : $(x-y)^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2+y^2\ge 2xy$<br>Chứng minh tương tự : $y^2+z^2\ge 2yz;\ z^2+x^2\ge 2zy$<br>Cộng theo từng vế ba BĐT trên ta được:<br>$2\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge 2\left(xy+z+zx\right)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$<br>$\Leftrightarrow (x+y+z)^2\ge 3\left(xy+yz+zx\right)$ | 0,5 |
| | Áp dụng BĐT trên với $x=\dfrac{1}{AD}; y=\dfrac{1}{BN}; z=\dfrac{1}{CM}$ ta suy ra được:<br>$\left(\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{BN}+\dfrac{1}{CM}\right)^2\ge 3\left(\dfrac{1}{AD\cdot BN}+\dfrac{1}{BN\cdot CM}+\dfrac{1}{CM\cdot AD}\right)$<br>Từ (5) và (6) $\Rightarrow \dfrac{1}{AD\cdot BN}+\dfrac{1}{BN\cdot CM}+\dfrac{1}{CM\cdot AD}\le \dfrac{4}{3(R-OH)^2}$ (đpcm)<br>Dấu " =" xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu " =" của các bất đẳng thức trên đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều. | 0,5 |
| **V<br>2,0<br>điểm** | **Cho ba số $a,b,c\ge 1$ thỏa mãn $16abc+4\left(ab+bc+ca\right)=81+24\left(a+b+c\right)$.**<br>**Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức**<br>$Q=\dfrac{1}{a\left(\sqrt{a^2-1}+a\right)}+\dfrac{1}{b\left(\sqrt{b^2-1}+b\right)}+\dfrac{1}{c\left(\sqrt{c^2-1}+c\right)}$ | **2,0** |
| | Ta có: $Q=\dfrac{\sqrt{a^2-1}-a}{a\left(a^2-1-a^2\right)}+\dfrac{\sqrt{b^2-1}-b}{b\left(b^2-1-b^2\right)}+\dfrac{\sqrt{c^2-1}-c}{c\left(c^2-1-c^2\right)}$<br>$=\dfrac{\sqrt{a^2-1}-a}{-a}+\dfrac{\sqrt{b^2-1}-b}{-b}+\dfrac{\sqrt{c^2-1}-c}{-c}=3-\left(\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}+\dfrac{\sqrt{b^2-1}}{b}+\dfrac{\sqrt{c^2-1}}{c}\right)$ | 0,5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\Rightarrow Q-3=-\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}+\frac{\sqrt{b^2-1}}{b}+\frac{\sqrt{c^2-1}}{c}\right)=-P.$ Với $P=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}+\frac{\sqrt{b^2-1}}{b}+\frac{\sqrt{c^2-1}}{c}$ | | |
| | Sử dụng bất đẳng thức : Với $x,y,z\ge 0$, ta luôn có $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\sqrt{3(x+y+z)}$<br>Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.<br>Từ bất đẳng thức đã cho ta có:<br>$P=\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{b^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{c^2}}\le\sqrt{3\left[3-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\right]}=\sqrt{9-3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}$<br>Suy ra $P\le\sqrt{9-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}$ | 0,5 |
| | Từ giả thiết $16abc+4(ab+bc+ca)=81+24(a+b+c)$<br>$\Leftrightarrow 16=\frac{81}{abc}+24\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)-4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(^*)$<br>Ta có $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\le\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$ và $\frac{1}{abc}\le\frac{1}{27}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3$<br>Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.<br>Đặt $t=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c};0<t\le 3$ (Vì $a,b,c\ge 1$). Từ $(^*)$ ta có<br>$16\le 3t^3+8t^2-4t\Leftrightarrow 3t^3+8t^2-4t-16\ge 0\Leftrightarrow(3t-4)(t+2)^2\ge 0\Leftrightarrow t\ge\frac{4}{3}$( Vi$0<t\le$ | 0,5 |
| | Suy ra $P\le\sqrt{9-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}\le\sqrt{9-\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{65}}{3}$<br>$\Rightarrow Q-3=-P\ge-\frac{\sqrt{65}}{3}\Leftrightarrow Q\ge\frac{9-\sqrt{65}}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi<br>$\begin{cases}16abc+4(ab+bc+ca)=81+24(a+b+c).\\ a=b=c\\ a,b,c\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{9}{4}$<br>Vậy giá trị nhỏ nhất của $Q$ là $\frac{9-\sqrt{65}}{3}$ khi $a=b=c=\frac{9}{4}$. | 0,5 |

----------- **Hết** -----------

**Chú ý:**

**- Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa, điểm thành phần giám khảo tự phân chia trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.**

**- Các trường hợp khác tổ chấm thống nhất phương án chấm.**