

Câu 1. (2,75 điểm)

- a) Thực hiện phép tính: $2\sqrt{9} - \sqrt{16}$.
- b) Xác định hệ số a để đồ thị của hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm $A(1;2)$.
- c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$.
- d) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$.

Câu 2. (1,75 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x - 9 = 0$, với m là tham số.

- a) Giải phương trình khi $m = 3$;
- b) Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm $x = 2$;
- c) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$ và $|x_1| - |x_2| = -6$.

Câu 3. (1,5 điểm)

Hai địa điểm A và B cách nhau 280 km. Hai ô tô cùng xuất phát từ A đến B. Biết vận tốc của xe thứ nhất lớn hơn vận tốc của xe thứ hai 10 km/h và xe thứ nhất đến B sớm hơn xe thứ hai 30 phút. Tính vận tốc mỗi xe?

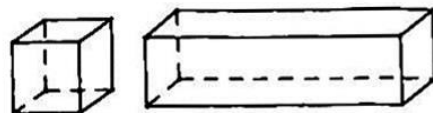
Câu 4. (3,5 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính BC. Trên nửa đường tròn (O) lấy điểm A (A khác B và C), gọi H là hình chiếu của A trên BC. Trên cung AC của nửa đường tròn (O) lấy điểm D (D khác A và C), gọi E là hình chiếu của A trên BD, I là giao điểm của hai đường thẳng AH và BD.

- a) Chứng minh tứ giác ABHE nội tiếp;
- b) Chứng minh $BI \cdot BD = BH \cdot BC$;
- c) Chứng minh hai tam giác AHE và ACD đồng dạng;
- d) Hai đường thẳng AE và DH cắt nhau tại F. Chứng minh $IF \parallel AD$.

Câu 5. (0,5 điểm)

Một người thợ cơ khí cần cắt vừa đủ một cây sắt dài 100 dm thành các đoạn để hàn lại thành khung một hình lập phương và một hình hộp chữ nhật. Biết hình hộp chữ nhật có chiều dài gấp 6 lần chiều rộng và chiều cao bằng chiều rộng (hình vẽ minh họa). Tìm độ dài của các đoạn sắt sao cho tổng thể tích của hai hình thu được nhỏ nhất?



LỜI GIẢI CHI TIẾT

Phạm Văn Ninh & Nguyễn Việt Dũng (GV THPT Chuyên Hạ Long)

- Bài 1:** (a) Thực hiện phép tính $2\sqrt{9} - \sqrt{16}$
(b) Xác định hệ số của a để đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm $A(1; 2)$.
(c) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$$

- (d) Rút gọn biểu thức

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{2}{\sqrt{x} + 3} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 3}$$

Lời giải

- (a) $2\sqrt{9} - \sqrt{16} = 2.3 - 4 = 2$
(b) Đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm $A(1; 2)$ khi và chỉ khi $a.1^2 = 2 \Leftrightarrow a = 2$.
(c) Xét hệ:

$$\begin{cases} 2x + y = 7(1) \\ x - 2y = -4(2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta có $y = 7 - 2x$. Thay vào phương trình (2) ta có:

$$x - 2(7 - 2x) = -4 \Leftrightarrow 5x - 14 = -4 \Leftrightarrow x = 2$$

Khi đó $y = 7 - 2.2 = 3$.

Vậy tất cả các nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x, y) = (2, 3)$.

- (d) Đkxđ: $x \geq 0, x \neq 9, x \neq 1$.

Ta có biến đổi:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{2}{\sqrt{x} + 3} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 3} \\ &= \frac{\sqrt{x} + 3 + 2(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{3\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{3}{\sqrt{x} + 3} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy ta có } P = \frac{3}{\sqrt{x} + 3}.$$

Bài 2: Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x - 9 = 0$ với m là tham số.

- Giải phương trình khi $m = 3$.
- Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm $x = 2$.

3. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ sao cho $|x_1| - |x_2| = -6$

Lời giải

1. Khi $m = 3$, phương trình trở thành:

$$x^2 - 8x - 9 = 0 \quad (1)$$

Phương trình (1) là phương trình bậc 2 ẩn x , có biệt thức

$$\Delta' = 4^2 - 1 \cdot (-9) = 25$$

Suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là :

$$x_1 = 4 + \sqrt{25} = 9$$

$$x_2 = 4 - \sqrt{25} = -1$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho khi $m = 3$ là

$$S = \{9; -1\}$$

2. Phương trình có nghiệm là $x = 2$ khi và chỉ khi:

$$2^2 - 2(m+1) \cdot 2 - 9 = 0 \Leftrightarrow -4m - 9 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{4}$$

3. Xét phương trình

$$x^2 - 2(m+1)x - 9 = 0 \quad (2)$$

Phương trình (2) là phương trình bậc hai ẩn x có biệt thức

$$\Delta' = (m+1)^2 + 9 > 0$$

Vậy nên phương trình sẽ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m thực.

Khi đó theo hệ thức Viete ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = -9 \end{cases}$$

Bởi $x_1 < x_2$ và $x_1 x_2 = -9 < 0$ nên $x_1 < 0 < x_2$.

Khi đó

$$|x_1| - |x_2| = -x_1 - x_2 = -(x_1 + x_2) = -2(m+1)$$

Ta có được:

$$|x_1| - |x_2| = -6 \Leftrightarrow -2(m+1) = -6 \Leftrightarrow m+1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy $m = 2$ là tất cả các giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Bài 3: Hai điểm A, B cách nhau 280 km . Hai ô tô cùng xuất phát từ A đến B . Biết vận tốc của xe thứ nhất lớn hơn vận tốc của xe thứ hai 10 km/h và xe thứ nhất đến B sớm hơn xe thứ hai 30 phút. Tính vận tốc mỗi xe?

Lời giải

Gọi x (đơn vị: km/h) là vận tốc của xe thứ nhất. (ĐK: $x > 10$)

Khi đó $x - 10$ là vận tốc của xe thứ hai.

Thời gian để xe thứ nhất đi từ A đến B là $\frac{280}{x}$ (giờ).

Thời gian để xe thứ hai đi từ A đến B là $\frac{280}{x - 10}$ (giờ).

Bởi xe thứ nhất đến B sớm hơn xe thứ hai 30 phút nên ta có :

$$\frac{280}{x - 10} - \frac{280}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2800}{x(x - 10)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x(x - 10) = 5600 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 5600 = 0$$

Phương trình ở trên là phương trình bậc hai ẩn x và có :

$$\Delta' = 5^2 + 5600 = 5625$$

Vậy nên phương trình sẽ có hai nghiệm :

$$x_1 = 5 - \sqrt{5625} = -70 \text{ (loại do không thoả mãn điều kiện } x > 10)$$

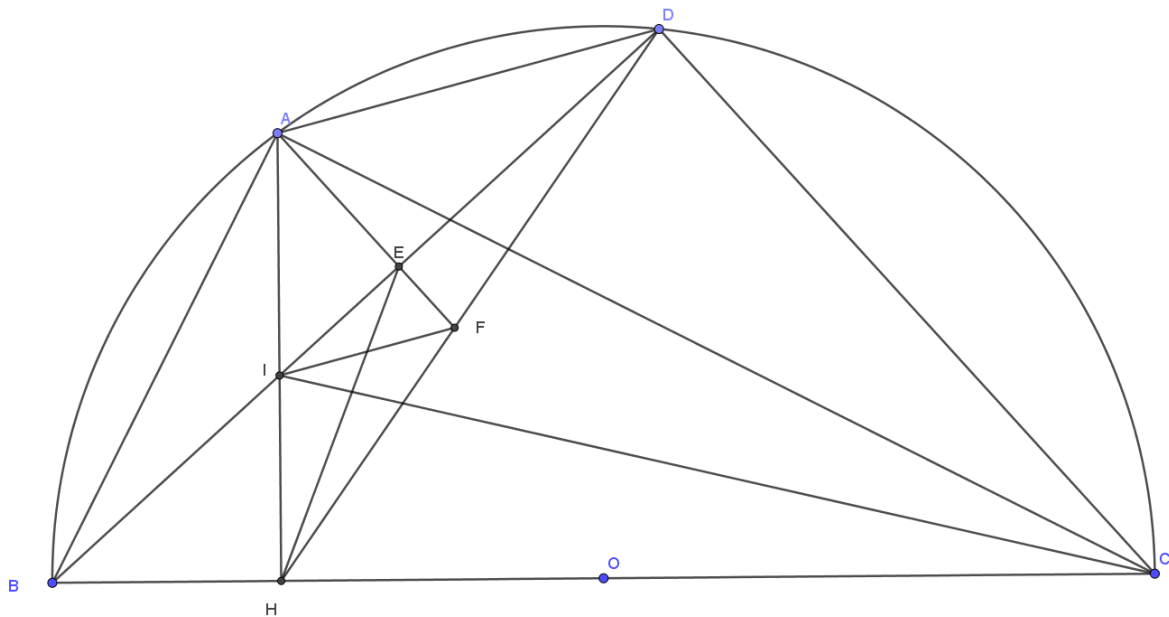
$$x_2 = 5 + \sqrt{5625} = 80 \text{ (lấy do thoả mãn điều kiện } x > 10)$$

Như vậy $x = 80$ và do đó:

- Vận tốc của xe thứ nhất là 80 km/h
- Vận tốc của xe thứ hai là 70 km/h.

Bài 4: Cho nửa đường tròn (O) , đường kính BC . Trên nửa đường tròn (O) lấy điểm A ($A \neq B, A \neq C$). Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC . Trên cung AC của nửa đường tròn (O) , lấy điểm D (D khác A và C), gọi E là hình chiếu của A lên BD , I là giao điểm của hai đường thẳng AH và BD .

- (a) Chứng minh tứ giác $ABHE$ nội tiếp.
- (b) Chứng minh $BI.BD = BH.BC$
- (c) Chứng minh rằng tam giác AHE và ACD đồng dạng.
- (d) Hai đường thẳng AE và DF cắt nhau tại F . Chứng minh $IF \parallel AD$.



Lời giải

- (a) E là hình chiếu vuông góc của A lên BD nên $\widehat{AEB} = 90^\circ$.
 H là hình chiếu vuông góc của A lên BC nên $\widehat{AHB} = 90^\circ$.
Do đó nên $\widehat{AHB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$ và thu được $AEHB$ nội tiếp.

- (b) Ta có $\widehat{IHC} = \widehat{IDC} = 90^\circ$ nên $IHCD$ là tứ giác nội tiếp. Do đó nên

$$\widehat{IDH} = \widehat{ICH}$$

Xét $\triangle BIC$ và $\triangle BHD$ ta có :

$\widehat{B}$ chung

$$\widehat{BDH} = \widehat{IDH} = \widehat{ICH} = \widehat{BDC}$$

$$\Rightarrow \triangle BIC \sim \triangle BHD (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{BI}{BC} = \frac{BH}{BD} \Rightarrow BI \cdot BD = BH \cdot BC$$

- (c) Bởi $ADCB$; $AEHB$ là các tứ giác nội tiếp nên :

$$\widehat{AEH} = 180^\circ - \widehat{ABH} = 180^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{ADC}$$

$$\widehat{AHE} = \widehat{ABE} = \widehat{ABD} = \widehat{ACD}$$

Xét $\triangle AHE$ và $\triangle ACD$ ta có:

$$\widehat{AEH} = \widehat{ADC}$$

$$\widehat{AHE} = \widehat{ACD}$$

$$\Rightarrow \triangle AHE \sim \triangle ACD (g.g)$$

(d) Xét $\triangle FED$ và $\triangle IHC$ ta có :

$$\begin{aligned}\widehat{FED} &= \widehat{IHC} = 90^\circ \\ \widehat{EDF} &= \widehat{IDH} = \widehat{ICH} \\ \Rightarrow \triangle FED &\sim \triangle IHC (g.g) \\ \Rightarrow \frac{FD}{IC} &= \frac{DE}{HC}\end{aligned}$$

Xét $\triangle AHC$ và $\triangle AED$ ta có :

$$\begin{aligned}\widehat{AHC} &= \widehat{AED} = 90^\circ \\ \widehat{ACH} &= \widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \widehat{ADE} \\ \Rightarrow \triangle AHC &\sim \triangle AED (g.g) \\ \Rightarrow \frac{DE}{HC} &= \frac{AD}{AC}\end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{FD}{IC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{FD}{AD} = \frac{IC}{AC}$$

$\triangle ABC$ vuông tại A có AH là đường cao nên

$$\widehat{IAB} = \widehat{HAB} = \widehat{ACB} = \widehat{ADB}$$

Xét $\triangle BAI$ và $\triangle BDA$ ta có:

$$\begin{aligned}\widehat{ABI} &= \widehat{ABD} \\ \widehat{IAB} &= \widehat{ADB} \\ \Rightarrow \triangle BAI &\sim \triangle BDA (g.g) \\ \Rightarrow \frac{AD}{AI} &= \frac{BA}{BI}\end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{FD}{AI} = \frac{IC}{AC} \cdot \frac{BA}{BI}$$

Theo lập luận ý (b) ta có $\triangle BDH \sim \triangle BIC$ nên :

$$\frac{BI}{IC} = \frac{BH}{HD}$$

Xét $\triangle BAH$ và $\triangle BCA$ ta có :

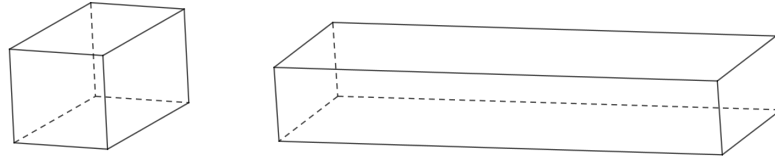
$$\begin{aligned}\widehat{BAH} &= \widehat{BCA} \\ \widehat{BHA} &= \widehat{BAC} = 90^\circ \\ \Rightarrow \triangle BAH &\sim \triangle BCA \\ \Rightarrow \frac{BH}{AH} &= \frac{BA}{AC}\end{aligned}$$

Do đó nên :

$$\frac{FD}{AI} = \frac{IC}{AC} \cdot \frac{BA}{BI} = \frac{BA}{CA} \cdot \frac{IC}{IB} = \frac{BH}{AH} \cdot \frac{HD}{HB} = \frac{HD}{AH}$$

Áp dụng định lý Thales đảo cho tam giác ADH ta có $IF \parallel AD$.

Bài 5: Một thợ cơ khí cắt vừa đủ một cây sắt dài $100dm$ thành các đoạn để hàn lại thành khung của hình lập phương và một hình hộp chữ nhật. Biết hình hộp chữ nhật có chiều dài gấp 6 lần chiều rộng và chiều cao bằng chiều rộng. (xem hình vẽ dưới). Tìm độ dài của đoạn cắt sao cho tổng thể tích của hai hình thu được nhỏ nhất ?



Lời giải

Gọi cạnh của hình lập phương là x (đơn vị: dm). Điều kiện $x > 0$.

Gọi chiều cao của hình hộp chữ nhật là y (đơn vị: dm). Điều kiện $y > 0$.

Từ giả thiết ta có chiều rộng của hình hộp chữ nhật là ydm và chiều dài của hình hộp chữ nhật $6y$ dm.

Tổng độ dài của hình hộp lập phương là $12x dm$.

Tổng độ dài của hình hộp chữ nhật là $32y$.

Mà thợ cắt vừa đủ một cây sắt dài $100m$.

Nên ta có phương trình:

$$12x + 32y = 100 \Leftrightarrow 3x + 8y = 25$$

Thể tích của hình lập phương là

$$V_1 = x^3$$

Thể tích của hình hộp chữ nhật là

$$V_2 = 6y^3$$

Tổng thể tích của hai hình là

$$V = V_1 + V_2 = x^3 + 6y^3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có :

$$x^3 + 3^3 + 3^3 \geq 3\sqrt[3]{3^3 \cdot 3^3 \cdot x^3} = 27x$$

$$6(y^3 + 2^3 + 2^3) \geq 6 \cdot 3\sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot y^3} = 72y$$

Suy ra :

$$\begin{aligned} V + 2 \cdot 27 + 6 \cdot 8 \cdot 2 &\geq 27x + 72y = 9(3x + 8y) = 9 \cdot 25 \\ \Rightarrow V &\geq 75 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 3, y = 2$,

Vậy để tổng thể tích đạt giá trị lớn nhất, ta cần cắt thành 12 đoạn có độ dài $3dm$ để lập thành hình lập phương và 8 đoạn $2dm$, 4 đoạn $12dm$ để lập thành hình hộp chữ nhật.