

Câu 1: (2,0 điểm)

1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$

2) Cho ba số $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b}$. Tính giá trị của

biểu thức sau: $P = (a-b)(b-c)(c-a)(a+2b+3c)^{2022} + 2023$

Câu 2: (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 - \left(\frac{2x+4}{x-3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{x-1}{x-3} = 0$

2) Đa thức $f(x)$ chia cho $x+1$ dư 4, chia cho x^2+1 dư $2x+3$. Tìm phần dư khi chia đa thức $f(x)$ cho $(x+1)(x^2+1)$.

Câu 3: (2,0 điểm)

1) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x^2 + 8y^2 + 4xy - 2x - 4y = 4$.

2) Chứng minh rằng nếu số nguyên n lớn hơn 1 thỏa mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố thì n chia hết cho 5.

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại điểm H.

1) Chứng minh: $\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = 2$

2) Gọi M là trung điểm của AC. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với HM, đường thẳng này cắt AB, BC lần lượt tại P, Q. Chứng minh $AM \cdot BQ = AH \cdot BH$.

3) Chứng minh $\triangle MPQ$ là tam giác cân.

Câu 5: (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq abc$.

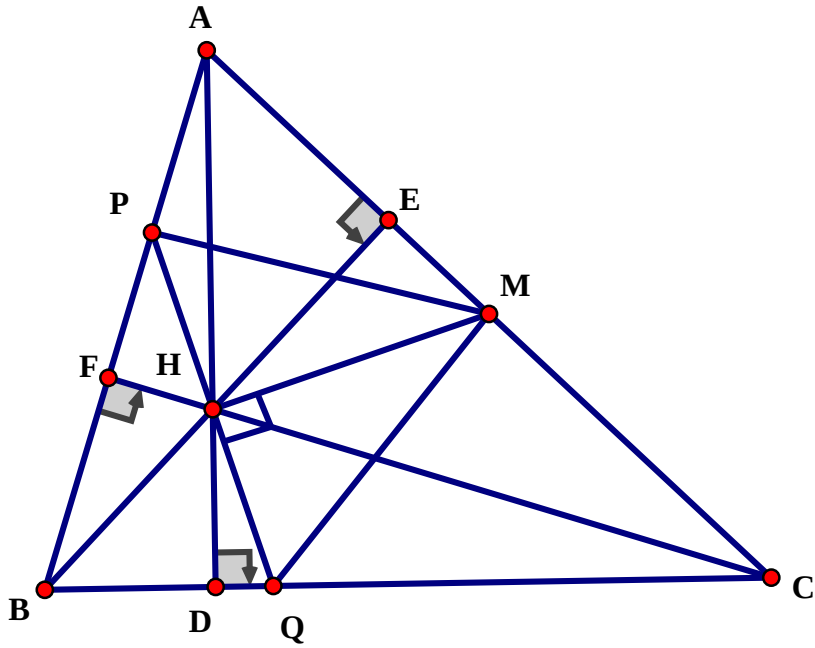
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab}$

----- Hết -----

*** Lưu ý: Học sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.**

Câu	Ý	Đáp án	Điểm
Câu 1 (2 điểm)	1	$= a^4(b-c) - b^4(a-b+b-c) + c^4(a-b)$ $= a^4(b-c) - b^4(a-b) - b^4(b-c) + c^4(a-b)$	0,25
		$= (b-c)(a^4 - b^4) - (a-b)(b^4 - c^4)$ $= (b-c)(a-b)(a+b)(a^2 + b^2) - (a-b)(b-c)(b+c)(b^2 + c^2)$	0,25
		$= (a-b)(b-c)(a^3 + ab^2 + a^2b + b^3 - b^3 - bc^2 - b^2c - c^3)$ $= (a-b)(b-c)[(a-c)(a^2 + ac + c^2) + b^2(a-c) + b(a-c)(a+c)]$	0,25
		$= (a-b)(b-c)(a-c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$	0,25
		Với $a, b, c \neq 0$, ta có:	
	2	$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b}$ $\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - \frac{a}{c} - \frac{c}{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{a-c}{b} - \frac{a^2-c^2}{ac} + \frac{b(a-c)}{ac} = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow (a-c)\left(\frac{1}{b} - \frac{a+c}{ac} + \frac{b}{ac}\right) = 0 \Leftrightarrow (a-c)(ac - ab - bc + b^2) = 0$ $\Leftrightarrow (a-c)[a(c-b) - b(c-b)] = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow (a-c)(c-b)(a-b) = 0$	0,25
		$\Rightarrow P = (a-b)(b-c)(c-a)(a+2b+3c)^{2022} + 2023$ $= 0 + 2023 = 2023$	0,25
Câu 2 (2 điểm)	1	ĐKXĐ: $x \neq -2, x \neq 3$	
		Ta có: $\frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x-3} = \frac{x-1}{x-3}$	0,25
		Đặt $a = \frac{x-1}{x+2}; b = \frac{x+2}{x-3} \Rightarrow ab = \frac{x-1}{x-3}$	
		Khi đó ta có phương trình:	
		$a^2 - (2b)^2 + 3ab = 0 \Leftrightarrow a^2 + 3ab - 4b^2 = 0$	0,25

		$\Leftrightarrow (a-b)(a+4b)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a=-4b \end{cases}$	
		Trường hợp 1: $a=b \Rightarrow \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2}{x-3} \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = (x+2)^2 \Leftrightarrow -4x + 3 = 4x + 4$ $\Leftrightarrow 8x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{8} \text{ (t/m)}$	0,25
		Trường hợp 2: $a=-4b \Rightarrow \frac{x-1}{x+2} = \frac{-4x-8}{x-3} \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = -4x^2 - 16x - 16$ $\Leftrightarrow 5x^2 + 12x + 19 = 0 \Leftrightarrow 5\left(x + \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{59}{5} = 0$ Do $5\left(x + \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{59}{5} \geq \frac{59}{5} > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ phương trình $\left(x + \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{59}{5} = 0 \text{ vô nghiệm}$ Vậy PT có nghiệm là $x = \frac{-1}{8}$	0,25
	2	$x^2 + 8y^2 + 4xy - 2x - 4y = 4 \Leftrightarrow (x + 2y - 1)^2 + 4y^2 = 5$ Do $4y^2 \geq 0; (x + 2y - 1)^2 \geq 0; 4y^2 \geq 0 \forall x, y; (x + 2y - 1)^2, 4y^2$ là số chính phương nên $\begin{cases} 4y^2 = 4 \\ (x + 2y - 1)^2 = 1 \end{cases}$	0,25
		+ TH1: $\begin{cases} y=1 \\ (x+2y-1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ (x+1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases} \end{cases} \text{ (t/m)}$	0,25
		+) TH2: $\begin{cases} y=-1 \\ (x+2y-1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ (x-3)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ \begin{cases} x=4 \\ x=2 \end{cases} \end{cases} \text{ (t/m)}$	0,25
		Vậy các cặp số nguyên $(x; y) \in \{(0;1); (-2;1); (2;-1); (4;-1)\}$	0,25
Câu3 (2điểm)	1	Theo định lí Bê-du ta có: $f(x)$ chia $x+1$ dư 4 $\Rightarrow f(-1)=4$ Do bậc đa thức chia $(x+1)(x^2+1)$ là 3 nên đa thức dư có dạng $ax^2 + bx + c$	0,25

Câu 4 (3 điểm)		Gọi thương của phép chia $f(x)$ cho $(x+1)(x^2+1)$ là $Q(x)$, ta có: $\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x^2+1).Q(x) + ax^2 + bx + c \\ &= (x+1)(x^2+1).Q(x) + ax^2 + a - a + bx + c \\ &= (x+1)(x^2+1).Q(x) + a(x^2+1) - a + bx + c \\ &= [(x+1).Q(x) + a](x^2+1) + bx + c - a \end{aligned}$ Vì $f(x)$ chia cho x^2+1 dư $2x+3 \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ c-a=3 \end{cases} \quad (1)$	0,25
		Mặt khác $f(-1)=4 \Rightarrow a - b + c = 4 \quad (2)$ Từ (1) và (2) $\Rightarrow a = \frac{3}{2}; b = 2; c = \frac{9}{2}$	0,25
		Vậy đa thức dư là: $\frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}$.	0,25
	2	Ta có với mọi số nguyên m thì m^2 chia cho 5 dư 0 ; 1 hoặc 4.	0,25
		+ Nếu n^2 chia cho 5 dư 1 thì $n^2 = 5k + 1 \Rightarrow n^2 + 4 = 5k + 5 : 5; k \in \mathbb{N}^*.$ nên $n^2 + 4$ không là số nguyên tố (loại)	0,25
		+ Nếu n^2 chia cho 5 dư 4 thì $n^2 = 5k + 4 \Rightarrow n^2 + 16 = 5k + 20 : 5; k \in \mathbb{N}^*.$ nên $n^2 + 16$ không là số nguyên tố (loại)	0,25
		Vậy $n^2 : 5$ hay n chia hết cho 5 (đpcm)	0,25
		-Vẽ hình phần a)	
			0,25

	1	$\frac{AH}{AD} = \frac{\frac{1}{2}BC.AH}{\frac{1}{2}BC.AD} = \frac{\frac{1}{2}(BD + DC).AH}{\frac{1}{2}BC.AD}$ $= \frac{\frac{1}{2}BD.AH + \frac{1}{2}CD.AH}{\frac{1}{2}BC.AD} = \frac{S_{ABH} + S_{ACH}}{S_{ABC}}$	0,25
		$\frac{BH}{BE} = \frac{S_{ABH} + S_{BCH}}{S_{ABC}}, \quad \frac{CH}{CF} = \frac{S_{ACH} + S_{BCH}}{S_{ABC}}$	0,25
		$\Rightarrow \frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = \frac{S_{ABH} + S_{ACH}}{S_{ABC}} + \frac{S_{ABH} + S_{BCH}}{S_{ABC}} + \frac{S_{ACH} + S_{BCH}}{S_{ABC}}$ $= \frac{2(S_{ABH} + S_{ACH} + S_{BCH})}{S_{ABC}} = 2 \text{ (DPCM)}$	0,25
	2	Ta có $AHM + AHP = PHM = 90^0$ (Vì $PH \perp MH$) $BQH + DHQ = 90^0$ (Vì ΔDHQ vuông tại D) Mà $AHP = DHQ$ (2 đối đỉnh) $\Rightarrow AHM = BQH$	0,25
		Ta có: $HBQ + BCA = 90^0$ (Vì tam giác BEC vuông tại E) $HAM + BCA = 90^0$ (Vì tam giác ADC vuông tại D) $\Rightarrow HBQ = HAM$	0,25
		Xét ΔAMH và ΔBQH có: $HBQ = HAM$ và $AHM = BQH$ (cmt) $\Rightarrow \Delta AMH \sim \Delta BQH(g.g)$	0,25
		$\Rightarrow \frac{AM}{BH} = \frac{AH}{BQ} \Rightarrow AM.BQ = AH.BH \text{ (đpcm)}$	0,25
	3	Vì $\Delta AMH \sim \Delta BQH(cmt) \Rightarrow \begin{cases} BQH = AMH \\ \frac{AM}{BH} = \frac{MH}{QH} \end{cases}$ mà $AM = CM$ $\Rightarrow \frac{CM}{BH} = \frac{MH}{QH} \Rightarrow \frac{BH}{CM} = \frac{QH}{MH} \text{ (1)}$	0,25
		CMTT: $\Delta BHP \sim \Delta CMH(g.g) \Rightarrow \frac{BH}{CM} = \frac{PH}{MH} \text{ (2)}$	0,25
		Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{PH}{MH} = \frac{QH}{MH}$ $\Rightarrow PH = QH \Rightarrow H$ là trung điểm của PQ	0,25

		Xét ΔPMQ có MH là đường trung tuyến đồng thời là đường cao $\Rightarrow \Delta PMQ$ cân tại M	0,25
Câu5 (1điểm)		Ta có với $x, y > 0$ thì: $(x+y)^2 \geq 4xy$ $\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) (*)$ Dấu "=" xảy ra khi $x = y$.	0,25
		Áp dụng bất đẳng thức trên ta được: $\frac{a}{a^2+bc} \leq \frac{a}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{bc} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{bc} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{abc} \right)$ Kết hợp với giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 \leq abc$ ta được: $\frac{a}{a^2+bc} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{abc} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} \right)$	0,25
		Tương tự ta có: $\frac{b}{b^2+ca} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} \right) ; \frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} \right)$ $\Rightarrow \frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ca} + \frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 \right)$	0,25
		Mặt khác dễ chứng minh được: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ $\Rightarrow 1 \geq \frac{ab+bc+ac}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{ab+bc+ac}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ $\Rightarrow P = \frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ca} + \frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 \right) \leq \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 3$. Vậy GTLN của biểu thức P là $\frac{1}{2}$ khi $a = b = c = 3$.	0,25

Chú ý: Nếu học sinh giải cách khác đúng thì chấm điểm từng phần tương ứng.