

Câu 1. (3,0 điểm)

- a) Cho hai số nguyên a và b thỏa mãn $24a^2 + 1 = b^2$. Chứng minh rằng chỉ có một số a hoặc b chia hết cho 5.
- b) Cho số nguyên tố p ($p > 3$) và hai số nguyên dương a, b sao cho $p^2 + a^2 = b^2$.

Chứng minh a chia hết cho 12 và $2(p + a + 1)$ là số chính phương.

Câu 2. (6,0 điểm) a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -1 \\ 2x^3 - y^3 = 2y - x \end{cases}$$

b) Giải phương trình: $(x^2 + 1)^2 + 3x(x^2 + 1) + 2x^2 = 0$

Câu 3. (2,0 điểm)

- a) Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{(a^2 - bc)(b^2 - ca)}{(a + b)} + \frac{(b^2 - ca)(c^2 - ab)}{(b + c)} + \frac{(c^2 - ab)(a^2 - bc)}{(c + a)} \leq 0$$

- b) Cho đa thức $P(x)$. Tính $P(\frac{5}{7})$, biết $P(x)$ thỏa mãn:

$$P(1) = 1; P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}P(x), \forall x \neq 0; P(x_1 + x_2) = P(x_1) + P(x_2), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Câu 4. (7,0 điểm)

Cho hình thang vuông ABCD có $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $AB < CD$. Điểm I nằm trong hình thang sao cho $BI = BA$, $CI = CD$. Kẻ IH vuông góc với BC tại H, đường thẳng IH cắt AD tại M.

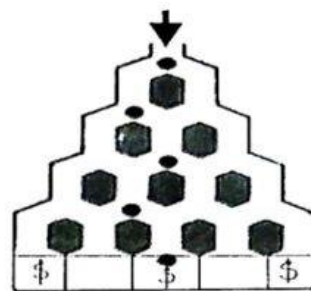
- a) Chứng minh: $MA^2 = MI \cdot (MH + HI)$.
- b) Gọi E là điểm đối xứng với D qua C. Gọi K là giao điểm của IE và BC.
Chứng minh: $KC \cdot AD = IM \cdot DE$.
- c) Gọi N là giao điểm của AI và DK.

Chứng minh: $IN^2 \cdot DE^2 \cdot \sin^2 KIC = (EK^2 + IE^2 - 4KE \cdot CE \cdot \cos KIC)(ID^2 - IN^2)$

Câu 5. (2,0 điểm)

a) Một máy chơi trò chơi minh họa như hình dưới, trong đó các hình lục giác màu sẫm là những vật cản. Người chơi thả bóng vào vị trí có mũi tên, bóng rơi xuống và sẽ lọt vào 1 trong số 5 vị trí, nếu bóng rơi vào vị trí \$ thì người chơi được nhận phần thưởng. Giả sử bóng luôn di chuyển từ trên xuống theo các lối đi màu trắng tạo bởi các vật cản và thành của máy.

Nếu bóng rơi vào ô có biểu tượng \$, người chơi thắng cuộc và có phần thưởng, ngược lại là thua. Giả sử các con đường đi có thể có của bóng là đồng khả năng. Tính xác suất trúng thưởng?



- b) Để chơi trò chơi này, người chơi phải mua 3 nghìn đồng một quả bóng và nếu trúng thưởng thì nhận được 4 nghìn đồng. Có 200 người chơi, có thể ước lượng số người thắng là bao nhiêu? Ước lượng số tiền mà người chủ chiếc máy thu được là bao nhiêu?

Hết.