

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức: $P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$

b) Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x+2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 26, $f(x)$ chia cho x^2-4 được thương là $-5x$ và còn dư.

Câu 2. (2,0 điểm) Giải phương trình:

a) $\frac{x+43}{57} + \frac{x+46}{54} = \frac{x+49}{51} + \frac{x+52}{48}$

b) $(2x+3)(x+2)^2(2x+5) = 3$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Chứng minh rằng $Q = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \vdots 9$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

b) Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Các đường cao AE, BF, CG cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC, qua H vẽ đường thẳng a vuông góc với HM, a cắt AB, AC lần lượt tại I và K.

a) Chứng minh tam giác ABC đồng dạng với tam giác EFC.

b) Qua C kẻ đường thẳng b song song với đường thẳng IK, b cắt AH, AB theo thứ tự tại N và D. Chứng minh $NC = ND$ và $HI = HK$.

c) Chứng minh: $\frac{AH}{HE} + \frac{BH}{HF} + \frac{CH}{HG} > 6$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

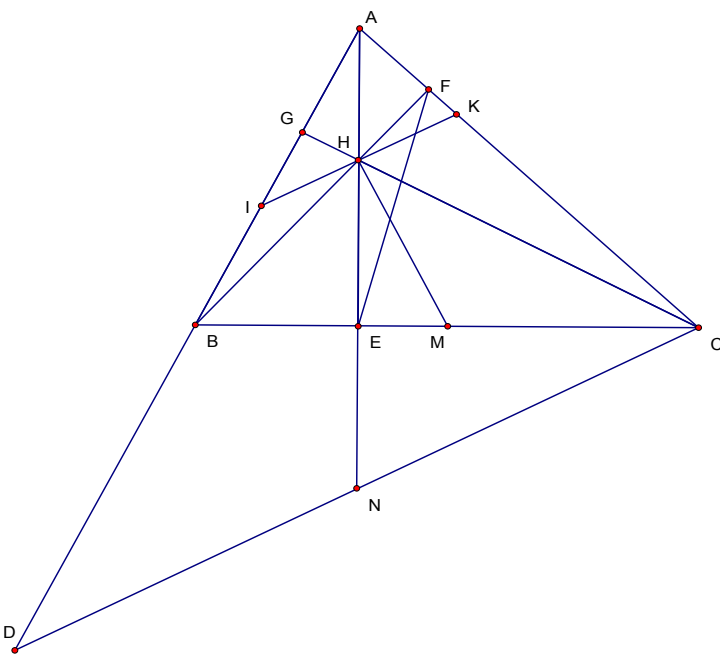
-----Hết-----

Họ và tên học sinh:..... Số báo danh:.....

Họ và tên Giám thị:..... Chữ ký:.....

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (2 điểm)	$a) P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$ $P = \frac{a(a^2 - 1) - 4(a^2 - 1)}{(a^3 - 8) - 7a(a - 2)}$ $P = \frac{(a^2 - 1)(a - 4)}{(a - 2)(a^2 - 5a + 4)} = \frac{(a - 1)(a + 1)(a - 4)}{(a - 2)(a - 1)(a - 4)}$ $P = \frac{a + 1}{a - 2}$	0,25
	$P = \frac{(a^2 - 1)(a - 4)}{(a - 2)(a^2 - 5a + 4)} = \frac{(a - 1)(a + 1)(a - 4)}{(a - 2)(a - 1)(a - 4)}$	0,5
	$P = \frac{a + 1}{a - 2}$	
	Vậy $P = \frac{a + 1}{a - 2}$ với $a \neq 1; a \neq 2; a \neq 4$.	0,25
	b) Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư là $ax + b$. Khi đó: $f(x) = (x^2 - 4).(-5x) + ax + b$	0,25
	Theo đề bài, ta có:	
	$\begin{cases} f(2) = 26 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 26 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 18 \end{cases}$	0,5
	Do đó: $f(x) = (x^2 - 4).(-5x) + 4x + 18$	
	Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm là: $f(x) = (x^2 - 4).(-5x) + 4x + 18$	0,25
Câu 2 (2 điểm)	$a) \frac{x + 43}{57} + \frac{x + 46}{54} = \frac{x + 49}{51} + \frac{x + 52}{48}$	
	$\Leftrightarrow \frac{x + 43}{57} + 1 + \frac{x + 46}{54} + 1 = \frac{x + 49}{51} + 1 + \frac{x + 52}{48} + 1$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{x + 100}{57} + \frac{x + 100}{54} - \frac{x + 100}{51} - \frac{x + 100}{48} = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (x + 100)\left(\frac{1}{57} + \frac{1}{54} - \frac{1}{51} - \frac{1}{48}\right) = 0$	0,25
	Do $\left(\frac{1}{57} + \frac{1}{54} - \frac{1}{51} - \frac{1}{48}\right) \neq 0$ nên $x + 100 \Rightarrow x = -100$	
	Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-100\}$	0,25

	b) $(2x+3)(x+2)^2(2x+5)=3$ $\Leftrightarrow (2x+3)(2x+5)(x+2)^2=3$ $\Leftrightarrow (4x^2+16x+15)(x^2+4x+4)=3 \quad (2)$ Đặt $y = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 4y = 4(x^2 + 4x + 4) = 4x^2 + 16x + 16$ $\Rightarrow 4x^2 + 16x + 15 = 4y - 1$ Khi đó $(2) \Leftrightarrow y(4y - 1) - 3 = 0$ $\Leftrightarrow 4y^2 - y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(4y + 3) = 0$ $+/- y - 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 1$ $\Leftrightarrow x + 2 = 1 \text{ hoặc } x + 2 = -1$ $\Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = -3$ $+/- 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow 4(x+2)^2 + 3 = 0$ Vì $4(x+2)^2 + 3 \geq 3$ nên phương trình vô nghiệm. Vậy $S = \{-1; -3\}$ là tập nghiệm của phương trình đã cho.	0,25 0,25 0,25 0,25
	a) $Q = n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ $= n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n^3 + 6n^2 + 12n + 8)$ $= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 = 3(n^3 + 3n^2 + 5n + 3)$ Đặt $C = n^3 + 3n^2 + 5n + 3 = n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + 3n + 3$ $= n^2(n + 1) + 2n(n + 1) + 3(n + 1)$ $= n(n + 1)(n + 2) + 3(n + 1)$ Ta thấy $n(n + 1)(n + 2)$ chia hết cho 3 (vì tích của 3 số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 3), mà $3(n + 1)$ chia hết cho 3. $\Rightarrow C$ chia hết cho 3 $\Rightarrow Q = 3C$ chia hết cho 9.	0,25 0,25 0,25 0,25
Câu 3 (2 điểm)	b) Đặt $b + c - a = x > 0$; $c + a - b = y > 0$; $a + b - c = z > 0$ Từ đó suy ra $a = \frac{y+z}{2}$; $b = \frac{x+z}{2}$; $c = \frac{x+y}{2}$; Thay vào biểu thức A ta được: $A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$ Suy ra $A \geq \frac{1}{2}(2+2+2)$ hay $A \geq 3$ Vậy $A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$, với a, b, c là ba cạnh của một tam giác.	0,25 0,25 0,25 0,25

		0,25
Câu 4 (3 điểm)	a) Ta có $\triangle AEC \sim \triangle BFC$ (g-g) nên suy ra $\frac{CE}{CF} = \frac{CA}{CB}$	0,25
	Xét $\triangle ABC$ và $\triangle EFC$ có $\frac{CE}{CF} = \frac{CA}{CB}$ và góc C chung	0,25
	nên suy ra $\triangle ABC \sim \triangle EFC$ (c-g-c)	0,25
	b) Vì $CN \parallel IK$, $HM \perp IK$ nên $HM \perp CN$ $\Rightarrow M$ là trực tâm $\triangle HNC$. $\Rightarrow MN \perp CH$ mà $CH \perp AD$ (H là trực tâm tam giác ABC) nên $MN \parallel AD$ Do M là trung điểm $BC \Rightarrow NC = ND$ $\frac{IH}{DN} = \frac{AH}{AN}$ (vì $IH \parallel DN$) $\frac{HK}{CN} = \frac{AH}{AN}$ (vì $KH \parallel CN$) Suy ra: $IH = HK$	0,25 0,25 0,25 0,25
	c) Ta có: $\frac{AH}{HE} = \frac{S_{AHC}}{S_{CHE}} = \frac{S_{ABH}}{S_{BHE}} = \frac{S_{AHC} + S_{ABH}}{S_{CHE} + S_{BHE}} = \frac{S_{AHC} + S_{ABH}}{S_{BHC}}$ Tương tự ta có $\frac{BH}{HF} = \frac{S_{BHC} + S_{BHA}}{S_{AHC}}$ và $\frac{CH}{HG} = \frac{S_{BHC} + S_{AHC}}{S_{BHA}}$ $\frac{AH}{HE} + \frac{BH}{HF} + \frac{CH}{HG} = \frac{S_{AHC} + S_{ABH}}{S_{BHC}} + \frac{S_{BHC} + S_{BHA}}{S_{AHC}} + \frac{S_{BHC} + S_{AHC}}{S_{BHA}}$ $= \frac{S_{AHC}}{S_{BHC}} + \frac{S_{ABH}}{S_{BHC}} + \frac{S_{BHC}}{S_{AHC}} + \frac{S_{BHA}}{S_{AHC}} + \frac{S_{BHC}}{S_{BHA}} + \frac{S_{AHC}}{S_{BHA}} \geq 6$. Dấu “=” xảy ra khi tam giác ABC đều, mà theo gt thì $AB < AC$ nên không xảy ra dấu bằng.	0,25 0,25 0,25 0,25

Câu 5 (1 điểm)	Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$ ta có $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$ $\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$ $\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ Áp dụng bất đẳng thức (**) ta có $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$	0,25
	Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\forall abc=1)$ Hay $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ nên $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{3}{2}$ Vậy $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$ (đpcm)	0,25

*** Lưu ý: HS làm cách khác đáp án mà đúng vẫn cho điểm tối đa.**