

**Câu 1 (4 điểm)**

Cho biểu thức: $A = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$.

a) Chứng minh rằng: $A > 4$.

b) Tìm các giá trị của a để biểu thức $\frac{6}{A}$ nhận giá trị nguyên.

Câu 2 (2 điểm)

Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2(y-2z) + y^2(z-x) + 2z^2(x-y) + xyz$.

Câu 3 (4 điểm)

a) Giải phương trình: $(x^2 - 4x + 11)(x^4 - 8x^2 + 21) = 35$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = (x+2)(y+2) \\ \left(\frac{x}{y+2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Câu 4 (4 điểm)

a) Tìm tất cả các số tự nhiên n để $B = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + 1$ là số nguyên tố.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \frac{\sqrt{x+6\sqrt{x-9}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-9}}}{\sqrt{\frac{81}{x^2} - \frac{18}{x}} + 1}$ với $x > 9$.

Câu 5 (6 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, ba đường cao AK, BD, CE cắt nhau tại H .

a) Chứng minh: $BH \cdot BD = BC \cdot BK$ và $BH \cdot BD + CH \cdot CE = BC^2$.

b) Chứng minh: $BH = AC \cdot \cot \widehat{ABC}$.

c) Gọi M là trung điểm của BC . Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt các đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P . Chứng minh rằng: $MP = MQ$.