

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN : TOÁN – LỚP 8

Thời gian làm bài: 150 phút

Đề gồm 01 trang

Bài 1. (3 điểm)

1) Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$.

2) Cho $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 4(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$.

Chứng minh rằng $x = y = z$.

Bài 2. (4 điểm) Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 4} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right), \text{ với } x \neq 0; x \neq 2.$$

1) Rút gọn P.

2) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $Q = 2.P$ nhận giá trị nguyên.

Bài 3. (4 điểm) Giải phương trình

1) $(x - 4,5)^3 - (x - 5,5)^3 = 12,25$

2) $\frac{6}{x^2 + 2} + \frac{12}{x^2 + 8} = 3 - \frac{7}{x^2 + 3}$.

Bài 4. (2 điểm) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Chứng minh

$$\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z} \leq 1.$$

Bài 5. (5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy một điểm M bất kỳ trên cạnh AC. Từ C vẽ một đường thẳng vuông góc với tia BM, đường thẳng này cắt tia BM tại D, cắt tia BA tại E.

1) Chứng minh $\angle EDA = \angle EBC$.

2) Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên cạnh AC thì tổng $BM.BD + CM.CA$ có giá trị không đổi.

Bài 6. (2 điểm)

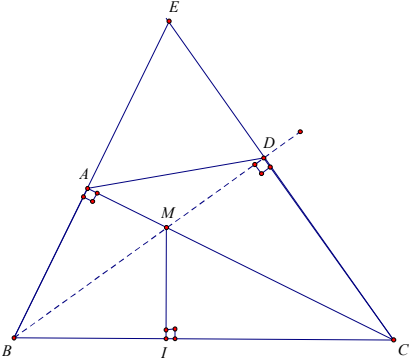
Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm bất kỳ trên cạnh AC, qua M kẻ các đường thẳng ME, MF lần lượt song song với cạnh AB, BC ($E \in BC$ và $F \in AB$). Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác BEMF có diện tích lớn nhất.

Họ và tên thí sinh: Họ, tên chữ ký GT 1:

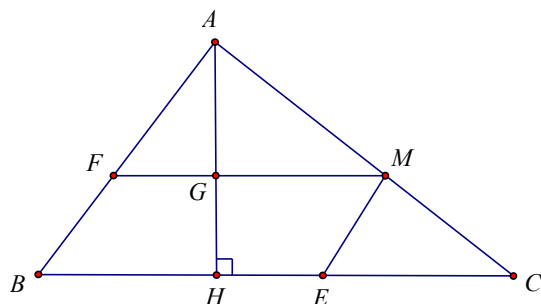
Số báo danh: Họ, tên chữ ký GT 2:

Bài	ý	Nội dung đáp án	Điểm
1 (3,0đ)	1) (1,5đ)	$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) =$ $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-z+z-y)$	0,5
		$= x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-z) - z^2(y-z)$	0,25
		$= (y-z)(x^2 - z^2) + (z-x)(y^2 - z^2)$	0,25
		$= (y-z)(x-z)(x+z) + (z-x)(y-z)(y+z)$	0,25
		$= (y-z)(x-z)(x+z-z-y) = (y-z)(x-z)(x-y)$	0,25
	2) (1,5đ)	$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 4(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$	
		$\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2xz + x^2$ $= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4xy - 4yz - 4xz$	0,25
		$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz = 0$	0,25
		$\Rightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2xz + x^2) = 0$	0,5
		$\Rightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$	
		Mà $(x-y)^2 \geq 0$; $(y-z)^2 \geq 0$; $(z-x)^2 \geq 0$ với mọi x, y, z	0,25
		nên $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$ khi và chỉ khi $x=y$; $y=z$; $z=x$ hay $x=y=z$ (đpcm).	0,25
2 (4,0đ)	1) (2,5đ)	ĐK: $x \neq 0$; $x \neq 2$	0,25
		$P = \left(\frac{(x^2 - 2x)(x-2)}{2(x^2 + 4)(x-2)} + \frac{2x}{(x^2 + 4)(x-2)} \right) \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2}$	0,5
		$= \frac{x(x-2)^2 + 4x^2}{2(x^2 + 4)(x-2)} \cdot \frac{(x+1)(x-2)}{x^2}$	0,5
		$= \frac{x[(x-2)^2 + 4x](x+1)}{2(x^2 + 4) \cdot x^2}$	0,5
		$= \frac{(x^2 - 4x + 4 + 4x)(x+1)}{2x(x^2 + 4)}$	0,25

		$= \frac{(x^2 + 4)(x + 1)}{2x(x^2 + 4)} = \frac{x + 1}{2x}$	0,5
	2 (1,5 đ)	Có $Q = 2.P = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$	0,5
		Với $x \neq 0$; $x \neq 2$; $x \in \mathbb{Z}$, để Q nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi x là Ư(1)	0,5
		Mà $Ư(1) = \{-1; 1\}$	
		$\Rightarrow x = -1$; $x = 1$ (thỏa mãn ĐK)	0,25
		Vậy giá trị x cần tìm là: -1; 1.	0,25
3. (4,0 đ)		$(x - 4,5)^3 - (x - 5,5)^3 = 12,25$	
		Đặt $y = x - 5$, phương trình trở thành $(y + 0,5)^3 - (y - 0,5)^3 = 12,25$	0,25
		$\Leftrightarrow y^3 + 3.y^2.0,5 + 3.y.0,5^2 + 0,5^3 - y^3 + 3.y^2.0,5 - 3.y.0,5^2 + 0,5^3 = 12,25$	0,25
		$\Leftrightarrow 3y^2 + 0,25 - 12,25 = 0$	0,25
	1) (2,0 đ)	$\Leftrightarrow 3(y - 2)(y + 2) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$	0,5
		Với $y = 2$, ta được: $x = 7$ Với $y = -2$, ta được $x = 3$	0,5
		Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 3$; $x = 7$.	0,25
		$\frac{6}{x^2 + 2} + \frac{12}{x^2 + 8} = 3 - \frac{7}{x^2 + 3} \Leftrightarrow \frac{6}{x^2 + 2} - 1 + \frac{12}{x^2 + 8} - 1 + \frac{7}{x^2 + 3} - 1 = 0$	0,5
		$\Leftrightarrow \frac{4 - x^2}{x^2 + 2} + \frac{4 - x^2}{x^2 + 8} + \frac{4 - x^2}{x^2 + 3} = 0$	0,5
		$\Leftrightarrow (4 - x^2) \left(\frac{1}{x^2 + 2} + \frac{1}{x^2 + 8} + \frac{1}{x^2 + 3} \right) = 0 \quad (1)$	
	2) (2 đ)	Có $\frac{1}{x^2 + 2} + \frac{1}{x^2 + 8} + \frac{1}{x^2 + 3} > 0$ với mọi giá trị của x.	0,25
		Nên $(1) \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$	0,5
		Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = 2$; $x = -2$.	0,25
4. (2,0 đ)		C/m: Với x, y là số dương và a, b là số bất kì. Ta có $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a + b)^2}{x + y}$	0,5
		Áp dụng kết quả trên, ta có:	0,5

		$\frac{1}{2x+y+z} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2}{x+y+x+z} \leq \frac{\frac{1}{4}}{x+y} + \frac{\frac{1}{4}}{x+z}$ $\frac{\frac{1}{4}}{x+y} + \frac{\frac{1}{4}}{x+z} = \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)^2}{x+y} + \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)^2}{x+z} \leq \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{x} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{y} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{x} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{z}$ $\Rightarrow \frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$	
		Tương tự cũng có: $\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right)$; $\frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \right)$	0,25
		$\Rightarrow \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} + \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right)$ $\Rightarrow \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$	0,5
		Theo bài ra $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 \Rightarrow \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$ (đpcm)	0,25
5. (5,0đ)			
1) (2,5đ)	- Chứng minh $\triangle EBD \sim \triangle ECA$ (gg)		0,75
	$\Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{ED}{EA}$ (hai cạnh tương ứng)		0,5
	Chứng minh: $\triangle EAD \sim \triangle ECB$ (c.g.c)		0,75
	$\Rightarrow \angle EDA = \angle ECB$ (hai góc tương ứng)		0,5
2) (2,5đ)	Kẻ $MI \perp BC$. Chứng minh $\triangle BMI \sim \triangle BCD$ (g.g)		0,75
	$\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BI}{BD}$ (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow BM \cdot BD = BC \cdot BI$		0,5
	Tương tự có $CM \cdot AC = BC \cdot IC$		0,5
	Cộng vế với vế, ta được $BM \cdot BD + CM \cdot CA = BC \cdot BI + BC \cdot CI = BC(BI + IC) = BC^2$		0,75
	Mà BC không đổi $\Rightarrow$ đpcm		

6.
(2,0đ)



Ta có $ME \parallel AB$ (gt) và $MF \parallel BC$ (gt) $\Rightarrow ME \parallel BF$ và $MF \parallel BE$
 $\Rightarrow$ Tứ giác BEMF là hình bình hành (hai cặp cạnh đối song song)

0,25

Kẻ $AH \perp BC$ tại H , AH cắt MF tại G.

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC$ và $S_{BEMF} = HG \cdot FM$ nên $\frac{S_{BEMF}}{S_{ABC}} = 2 \cdot \frac{HG}{AH} \cdot \frac{FM}{BC}$

0,25

Gọi $AM = x$; $MC = y \Rightarrow AC = x + y$

Xét $\triangle ABC$ có $MF \parallel BC$ (gt) $\Rightarrow \frac{FM}{BC} = \frac{AM}{AC}$ (hệ quả định lí Talet)

0,25

$$\Rightarrow \frac{FM}{BC} = \frac{x}{x+y}$$

Xét $\triangle AHC$ có $GM \parallel HC \Rightarrow \frac{HG}{AH} = \frac{CM}{AC}$ (định lí Talet) $\Rightarrow \frac{HG}{AH} = \frac{y}{x+y}$

0,25

$$\text{Do đó } \frac{S_{BEMF}}{S_{ABC}} = 2 \cdot \frac{xy}{(x+y)^2}$$

0,5

$$\text{Ta có : } (x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow \frac{xy}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{BEMF}}{S_{ABC}} \leq 2 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow S_{BEMF} \leq \frac{1}{2} \cdot S_{ABC}$$

0,25

Mà S_{ABC} không đổi nên S_{BEMF} đạt giá trị lớn nhất là $\frac{1}{2} \cdot S_{ABC}$ khi và chỉ khi $x = y$

0,25

Hay M là trung điểm của AC.