UBND THÀNH PHỐ HẢI DƯƠNG
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 – VÒNG II
NĂM HỌC 2024-2025
Môn: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút
(Đề thi gồm 06 câu, 02 trang)

Ngày thi: 21 tháng 10 năm 2024

Câu I (2,0 điểm).

1. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$\sqrt{x}+2\sqrt{y}+3\sqrt{z}=3 \text{ và } 2\sqrt{xy}+3\sqrt{xz}+6\sqrt{yz}=3.$$

Chứng minh rằng: $\dfrac{x}{4y}+\dfrac{4y}{9z}+\dfrac{9z}{x}=3$

2. Cho đa thức $P(x)=x^4-2x^3+3x^2+ax+b$ (a, b là các hệ số). Tính giá trị của biểu thức $M=P(10)-P(0)$, biết rằng $P(x)$ là bình phương của một đa thức.

Câu II (2,0 điểm).

1. Giải phương trình: $x^2-3x+1=\dfrac{7}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-xy+y^2+x-2y=0 \\ 2x^2-xy+2y^2-5y+2=0 \end{cases}$

Câu III (2,0 điểm).

1. Giải phương trình nghiệm nguyên: $(2x-y-2)^2=7(x-2y-y^2-1)$.

2. Cho a, n là các số nguyên dương thỏa mãn $a=2+2\sqrt{28n^2+1}$. Chứng minh a là số chính phương.

Câu IV (2,5 điểm).

1. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a ($a>0$). N là một điểm bất kỳ trên cạnh AB (N khác A, B). Đường thẳng CN cắt đường thẳng AD tại E. Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{1}{CN^2}+\dfrac{1}{CE^2}$ theo a.

2. Cho P là một điểm bất kỳ nằm bên trong tam giác ABC. Gọi Q là giao điểm của AP với cạnh BC. Đường thẳng qua P song song với AC cắt AB tại M, đường thẳng qua P song song với AB cắt AC tại N.

a. Chứng minh rằng: $\dfrac{AM}{AB}+\dfrac{AN}{AC}+\dfrac{PQ}{AQ}=1$

b. Xác định vị trí điểm P bên trong tam giác ABC để $\dfrac{AM}{AB.AC}=\dfrac{1}{27}.\dfrac{AQ}{AN.PQ}$.

Câu V (0,5 điểm).

Trên mặt phẳng cho 4048 điểm phân biệt, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Người ta tô 2024 điểm bằng màu đỏ và tô 2024 điểm còn lại bằng màu xanh. Chứng minh rằng bao giờ cũng tồn tại một cách nối tất cả các điểm màu đỏ với tất cả các điểm màu xanh bởi 2024 đoạn thẳng mà trong đó không có hai đoạn thẳng nào cắt nhau.

Câu VI (1,0 điểm).

Cho các số thực x, y thỏa mãn $4x^2 + y^2 \le 8$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4\left(x^2 + xy + 6x + 1\right) + \left(y + 6\right)^2}{2x + y + 6}.$$

-----------------------------**Hết**-----------------------------

Họ và tên thí sinh..Số báo danh..

Chữ kí giám thị 1..Chữ kí giám thị 2..

UBND THÀNH PHỐ HẢI DƯƠNG
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HƯỚNG DẪN CHẤM

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 – VÒNG 2
NĂM HỌC 2024-2025
Môn: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút
(Đáp án gồm có 07 trang)

Ngày thi: 21 tháng 10 năm 2024

Câu I (2,0 điểm).

1. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau: $\sqrt{x}+2\sqrt{y}+3\sqrt{z}=3$ và $2\sqrt{xy}+3\sqrt{xz}+6\sqrt{yz}=3$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{4y}+\frac{4y}{9z}+\frac{9z}{x}=3$	**1,0**
Đặt $a=\sqrt{x}; b=2\sqrt{y}; c=3\sqrt{z}\ (a, b, c>0)$ khi đó ta có $a+b+c=3$ và $ab+bc+ca=3$.	0,25
Suy ra $(a+b+c)^2=3(ab+bc+ca)=9$ $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$	0,25
$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ $\begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \\ c-a=0 \end{cases}$ Suy ra $a=b=c$	0,25
Suy ra $\sqrt{x}=2\sqrt{y}=3\sqrt{z}$ $x=4y=9z$ Suy ra $\frac{x}{4y}+\frac{4y}{9z}+\frac{9z}{x}=1+1+1=3$ (Đpcm)	0,25
2. Cho đa thức $P(x)=x^4-2x^3+3x^2+ax+b$ (a,b là các hệ số). Tính giá trị của biểu thức $M=P(10)-P(0)$, biết rằng $P(x)$ là bình phương của một đa thức.	**1,0**
$P(x)$ là bình phương của một đa thức thì $P(x)=(x^2+cx+d)^2=x^4+2cx^3+(c^2+2d)x^2+2cdx+d^2$	0.25
Mà $P(x)=x^4-2x^3+3x^2+ax+b$ nên ta có hệ phương trình	0.25

$\begin{cases} 2c = -2 \\ c^2 + 2d = 3 \\ 2cd = a \\ d^2 = b \end{cases}$	
Giải hệ tìm được $a = -2; b = 1; c = -1; d = 1.$	0.25
Suy ra $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ nên ta có: $M = P(10) - P(0) = 10^4 - 2.10^3 + 3.10^2 - 2.10 = 8280.$	0.25

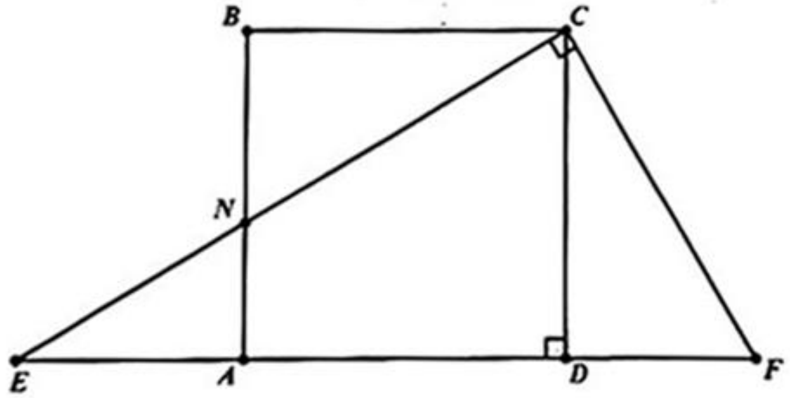
Câu II (2,0 điểm).

1. Giải phương trình: $x^2 - 3x + 1 = \frac{7}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$	**1,0**
$x^2 - 3x + 1 = \frac{7}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = \frac{7}{3}\sqrt{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}$ Đặt $a = \sqrt{x^2 - x + 1}$, $b = \sqrt{x^2 + x + 1}$ (Điều kiện: a, b > 0) Suy ra $2a^2 - b^2 = x^2 - 3x + 1$ Ta có: $2a^2 - b^2 = \frac{7}{3}ab$	0.25
$6a^2 - 7ab - 3b^2 = 0$ $(3a + b)(2a - 3b) = 0$ $\left[\begin{array}{l} 3a + b = 0 \\ 2a - 3b = 0 \end{array}\right.$	0.25
Trường hợp $3a + b = 0$ loại vì a, b > 0 Trường hợp $2a - 3b = 0$ suy ra $2\sqrt{x^2 - x + 1} = 3\sqrt{x^2 + x + 1}$	0.25
$5x^2 + 13x + 5 = 0$ $5\left(x + \frac{13}{10}\right)^2 - \frac{69}{20} = 0$ $x = \frac{\pm\sqrt{69} - 13}{10}$ Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{\pm\sqrt{69} - 13}{10}\right\}$.	0.25
2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 + x - 2y = 0 \\ 2x^2 - xy + 2y^2 - 5y + 2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 + x - 2y = 0 \\ 2x - xy + y = 2 \end{cases}$	**1,0**

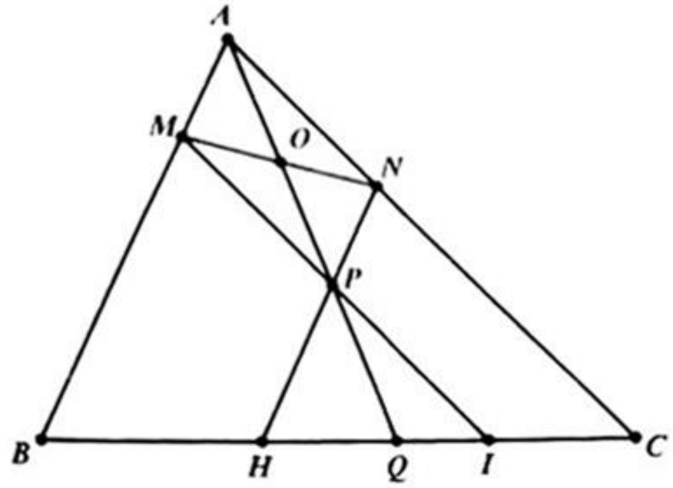
Ta có $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 + x - 2y = 0 \\ 2x^2 - xy + 2y^2 - 5y + 2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 4y = 0 \\ 2x^2 - xy + 2y^2 - 5y + 2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 + x - 2y = 0 & (1) \\ 2x - xy + y = 2 & (2) \end{cases}$	0.25
Từ (2) ta có: $x(2-y) - (2-y) = 0$ $(x-1)(2-y) = 0$ Suy ra $x = 1$ hoặc $y = 2$	0.25
Nếu $x = 1$ thay vào (1) ta được $(y-1)(y-2) = 0$ suy ra $y = 1$ hoặc $y = 2$	0.25
Nếu $y = 2$ thay vào (1) ta được $x(x-1) = 0$ suy ra $x = 0$ hoặc $x = 1$ Vậy hệ phương trình có các nghiệm $(x;y)$ là $(1;2),(1;1),(0;2)$	0.25
Câu III (2,0 điểm). **1.** Giải phương trình nghiệm nguyên: $(2x - y - 2)^2 = 7(x - 2y - y^2 - 1)$.	**1,0**
Từ phương trình đã cho ta được $4x^2 - 4xy + 8y^2 - 15x + 18y + 11 = 0$	0.25
$4x^2 - 4x\left(y + \frac{15}{4}\right) + \left(y + \frac{15}{4}\right)^2 + 7y^2 + \frac{21}{2}y - \frac{49}{16} = 0$ $\left(2x - y - \frac{15}{4}\right)^2 + \frac{7}{4}\left(4y^2 + 6y + \frac{9}{4}\right) - 7 = 0$ $\left(2x - y - \frac{15}{4}\right)^2 + \frac{7}{4}\left(2y + \frac{3}{2}\right)^2 = 7$ (1)	0.25
Từ (1) suy ra $\frac{7}{4}\left(2y + \frac{3}{2}\right)^2 \le 7$ suy ra $\left(2y + \frac{3}{2}\right)^2 \le 4$ suy ra $-2 \le 2y + \frac{3}{2} \le 2$ $-\frac{7}{4} \le y \le \frac{1}{4}$ Mà y là số nguyên suy ra $y \in \{-1; 0\}$	0.25
+ Với $y = -1$ thay vào (1) được : $\left(2x - \frac{11}{4}\right)^2 = \frac{105}{16}$ không có nghiệm x nguyên + Với $y = 0$ thay vào (1) được : $\left(2x - \frac{15}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$, phương trình này có một nghiệm nguyên $x = 1$ Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x; y) = (1; 0)$.	0.25
2. Cho a, n là các số nguyên dương thỏa mãn $a = 2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$. Chứng minh a là số chính phương.	**1.0**

$a=2+2\sqrt{28n^2+1}$ là số nguyên dương nên $28n^2+1=k^2$ (k $\in$ N) và k lẻ	0.25
Đặt k = 2m + 1 với m $\in$ N Suy ra $28n^2+1=(2m+1)^2$ suy ra $7n^2=m(m+1)$	0.25
Vì (m; m+1) = 1 và $n \in N^*$ nên có hai trường hợp sau: Trường hợp 1: m = t^2 và m + 1 = $7h^2$ (t, h $\in N^*$) $\Rightarrow$ $t^2 = 7h^2 - 1$ chia cho 7 dư 6 (điều này không xảy ra vì số chính phương chia 7 chỉ dư 0; 1; 2 hoặc 4). Suy ra trường hợp 1 loại	0.25
Trường hợp 2: m = $7t^2$ và m + 1 = h^2 (t, h $\in N^*$) $a=2+2k=2+2(2m+1)=4(m+1)=(2h)^2$ là một số chính phương (Vì h $\in N^*$)	0.25

Câu IV (2,5 điểm).

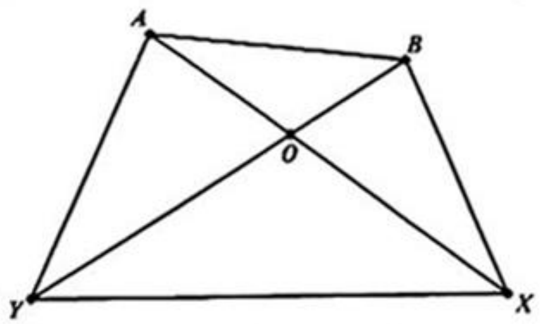
1. Cho hình vuông $ABCD$, có độ dài cạnh bằng a $(a>0)$. N là một điểm bất kỳ trên cạnh AB (N khác A, B). Đường thẳng CN cắt đường thẳng AD tại E. Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{1}{CN^2}+\dfrac{1}{CE^2}$ theo a.	**0.5**
 Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với CE cắt đường thẳng AD tại F Ta chứng minh được $\Delta CDF = \Delta CBN\,(g.c.g)$ Suy ra $CF = CN$.	0.25
Xét CEF vuông tại C có đường cao CD nên ta có: $\dfrac{1}{CE^2}+\dfrac{1}{CF^2}=\dfrac{1}{CD^2}$ hay $\dfrac{1}{CN^2}+\dfrac{1}{CE^2}=\dfrac{1}{a^2}$	0.25

2. Cho P là một điểm bất kỳ nằm bên trong tam giác ABC. Gọi Q là giao điểm của AP với cạnh BC. Đường thẳng qua P song song với AC cắt AB tại M, đường thẳng qua P song song với AB cắt AC tại N. **a.** Chứng minh rằng: $\dfrac{AM}{AB}+\dfrac{AN}{AC}+\dfrac{PQ}{AQ}=1$	**1,0**

 Gọi H và I lần lượt là giao điểm của NP và MP với BC Vì MI//AC suy ra $\frac{AM}{AB}=\frac{CI}{BC}$ (1)	0,25
Vì NH//AB suy ra $\frac{AN}{AC}=\frac{BH}{BC}$ (2) Chứng minh được ΔABC đồng dạng với ΔPHI (g-g) $\frac{PH}{AB}=\frac{HI}{BC}$	0,25
Chứng minh được ΔABQ đồng dạng với ΔPHQ (g-g) Suy ra $\frac{PH}{AB}=\frac{PQ}{AQ}$ suy ra $\frac{PQ}{AQ}=\frac{HI}{BC}$ (3)	0,25
Từ (1),(2),(3) suy ra $\frac{AM}{AB}+\frac{AN}{AC}+\frac{PQ}{AQ}=\frac{CI}{BC}+\frac{HB}{BC}+\frac{IH}{BC}=\frac{BC}{BC}=1$ (Đpcm)	0,25
b. Xác định vị trí điểm P bên trong tam giác ABC để $\frac{AM}{AB.AC}=\frac{1}{27}.\frac{AQ}{AN.PQ}$.	**1,0**
Từ $\frac{AM}{AB.AC}=\frac{1}{27}.\frac{AQ}{AN.PQ}$ suy ra $\frac{AM.AN.PQ}{AB.AC.AQ}=\frac{1}{27}$	0,25
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số không âm ta có $\left(\frac{AM}{AB}+\frac{AN}{AC}+\frac{PQ}{AQ}\right)^3\ge 27.\frac{AM.AN.PQ}{AB.AC.AQ}$ Mà theo câu a ta có $\frac{AM}{AB}+\frac{AN}{AC}+\frac{PQ}{AQ}=1$ suy ra $\frac{AM.AN.PQ}{AB.AC.AQ}\le\frac{1}{27}$ Để $\frac{AM.AN.PQ}{AB.AC.AQ}=\frac{1}{27}$ thì $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{PQ}{AQ}=\frac{1}{3}$	0,25
Gọi O là giao điểm của MN và AP	0,25

Mà tứ giác AMPN là hình bình hành suy ra O là trung điểm của MN Từ $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ suy ra MN//BC Suy ra $\frac{MO}{BQ}=\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$ Mà MN=2MO suy ra BC=2BQ	
Suy ra Q là trung điểm của BC Suy ra AQ là đường trung tuyến, mà $\frac{PQ}{AQ}=\frac{1}{3}$ nên P là trọng tâm tam giác ABC Vậy P là trọng tâm của tam giác ABC thì $\frac{AM}{AB.AC}=\frac{1}{27}.\frac{AQ}{AN.PQ}$	0,25

Câu V (0,5 điểm).

Trên mặt phẳng cho 4048 điểm phân biệt, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Người ta tô 2024 điểm bằng màu đỏ và tô 2024 điểm còn lại bằng màu xanh. Chứng minh rằng bao giờ cũng tồn tại một cách nối tất cả các điểm màu đỏ với tất cả các điểm màu xanh bởi 2024 đoạn thẳng mà trong đó không có hai đoạn thẳng nào cắt nhau.	0.5
Xét tất cả các cách nối 2024 cặp điểm (điểm màu đỏ với điểm màu xanh) bằng 2024 đoạn thẳng. Các cách nối như vậy luôn tồn tại và do chỉ có 2024 cặp điểm nên số tất cả các cách nối như vậy là hữu hạn. Do đó, luôn tồn tại một cách nối có tổng độ dài các đoạn thẳng là nhỏ nhất. Ta chứng minh đây là cách nối cần tìm.	0.25
Thật vậy, giả sử trong cách nối thu được tổng độ dài các đoạn thẳng là nhỏ nhất, lại có 2 đoạn thẳng AX và BY cắt nhau tại O (trong đó A và B tô màu đỏ, còn X và Y tô màu xanh). Hình vẽ minh họa  Ta có: $AY+BX<(AO+OY)+(BO+OX)=(AO+OX)+(BO+OY)$ Suy ra $AY+BX<AX+BY$. Như vậy, việc thay 2 đoạn thẳng AX và BY bằng hai đoạn thẳng AY và BX, các đoạn thẳng khác giữ nguyên ta sẽ nhận được một cách nối mới có tổng độ dài các đoạn thẳng là nhỏ hơn cách nối trên. Vô lý vì trái với giả sử trên Suy ra giả sử trên là sai tức cách nối có tổng độ dài các đoạn thẳng nhỏ nhất là cách nối tất cả các điểm màu đỏ với tất cả các điểm màu xanh bởi 2024 đoạn thẳng mà trong đó không có hai đoạn thẳng nào cắt nhau.	0.25

Cho các số thực x, y thỏa mãn $4x^2 + y^2 \le 8$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $$P = \frac{4\left(x^2 + xy + 6x + 1\right) + \left(y + 6\right)^2}{2x + y + 6}.$$	**1.0**
Ta có $P = \frac{4\left(x^2 + xy + 6x + 1\right) + \left(y + 6\right)^2}{2x + y + 6} = \frac{\left(2x + y + 6\right)^2 + 4}{2x + y + 6}$ $P = 2x + y + 6 + \frac{4}{2x + y + 6}$	0.25
Từ giả thiết ta có $8 \ge 4x^2 + y^2 \ge \frac{\left(2x + y\right)^2}{2}$ suy ra $\left(2x + y\right)^2 \le 16$ $-4 \le 2x + y \le 4$ suy ra $2 \le 2x + y + 6 \le 10$. Đặt $t = 2x + y + 6$, $2 \le t \le 10$. Khi đó ta có $P = t + \frac{4}{t}$	0.25
Ta có $P - \frac{52}{5} = t + \frac{4}{t} - \frac{52}{5} = \frac{5t^2 - 52t + 20}{5t} = \frac{(5t - 2)(t - 10)}{5t}$ Vì $2 \le t \le 10$ suy ra $\frac{(t - 10)(5t - 2)}{5t} \le 0$ suy ra $P \le \frac{52}{5}$	0.25
Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} t = 2x + y = 10 \\ 2x = y \\ 4x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{52}{5}$ đạt được khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.	0.25

Chú ý: Học sinh làm cách khác, nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.