

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Cho a và b là các số nguyên dương sao cho $a + 1$ và $b + 9$ cùng chia hết cho 6.

Chứng minh: $4^a + a + b$ chia hết cho 6

b) Tìm các số nguyên n để $n^2 + n + 3$ là số chính phương.

Câu 2. (3,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} - \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 4x + 3} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$ biết $x \neq 1; x \neq -1; x \neq -3$

b) Bạn An đi nhà sách mua một quyển sách đang khuyến mãi giảm giá 10%, An có thể khách hàng thân thiết của nhà sách nên được giảm thêm 2% trên giá đã giảm nữa. Do đó An chỉ phải trả 44100 đồng cho quyển sách đó. Hỏi giá ban đầu của quyển sách nếu không khuyến mãi giảm giá là bao nhiêu?

c) Chứng minh đa thức $f(x) = (x+1)^{2024} + (x+2)^{2025} - 1$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + 3x + 2$

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $(x-4)^2 + (x-5)^2 = (9-2x)^2$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 - 10y = 0 \\ x^2 + 6y^2 = 10 \end{cases}$$

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 99$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 5a^2 + 2b^2 + c^2$

Câu 5. (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$. Kẻ 3 đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Trên đường cao AD lấy điểm I sao cho BI vuông góc với IC.

a) Tính độ dài đoạn thẳng BI và DI biết $BD = 4$ cm và $CD = 9$ cm.

b) Chứng minh: $BD = DH \cdot \tan \widehat{ACB}$.

c) Gọi M là trung điểm của BC, kẻ đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BE và CF lần lượt tại Q và P. Chứng minh $MP = MQ$

Câu 6. (2,0 điểm) Trong túi đựng 78 viên bi cùng kích thước và khối lượng với 2 màu đỏ và màu xanh. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ túi. Biết rằng xác suất lấy được viên bi màu đỏ bằng 95% xác suất lấy được viên bi màu xanh. Hỏi trong túi có bao nhiêu viên bi màu đỏ, bao nhiêu viên bi màu xanh?

-----Hết-----
(Lưu ý: Học sinh không được sử dụng máy tính cầm tay)

Họ và tên học sinh:.....Số báo danh:.....